This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

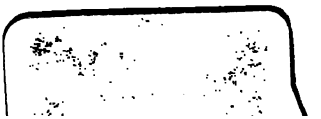
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

600029491V

1800 e. 26.



Die

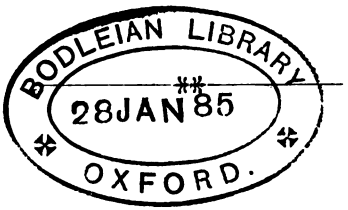
Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,
a. o. Professor an der Universität Jena.



BRESLAU.
Verlag von Wilhelm Koebner.
1884.

S. Math. 27h

Die

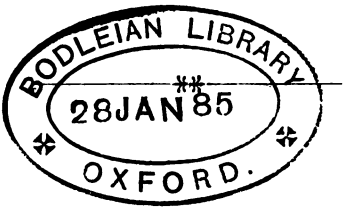
Grundlagen der Arithmetik.

Eine logisch mathematische Untersuchung

über den Begriff der Zahl

von

Dr. G. Frege,
a. o. Professor an der Universität Jena.



BRESLAU.
Verlag von Wilhelm Koebner.
1884.

S. Math 27h

Inhalt.

Seite

§ 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf der Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe gerichtetes Bestreben erkennbar. 1

§ 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises. 2

§ 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung: die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori sind. Sinn dieser Ausdrücke. 3

§ 4. Die Aufgabe dieses Buches. 4

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox nennt. 5

§ 6. Leibnizens Beweis von $2+2=4$ hat eine Lücke. Grassmanns Definition von $a+b$ ist fehlerhaft. 7

§ 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet. 9

§ 8. Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich. 11

Seite

Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?

§ 9. Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen. 12

§ 10. Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze inductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen. 14

§ 11. Leibnizens „Eingeboren". 17

Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori oder analytisch?

§ 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnissgrund. 17

§ 13. Unterschied von Arithmetik und Geometrie 19

§ 14. Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet 20

§ 15. Ansichten von Leibniz und St. Jevons 21

§ 16. Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache." Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten 22

§ 17. Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile. . . 23

II. Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl.

§ 18. Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen. 24

§ 19. Die Definition darf nicht geometrisch sein. 25

§ 20. Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz. 26

Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äussern Dinge?

§ 21. Meinungen von M. Cantor und E. Schröder 27

§ 22. Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab 28

§ 23. Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar 29

Seite

§ 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden 30

§ 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen 32

Ist die Zahl etwas Subjectives?

§ 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives 33

§ 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe 36

Die Anzahl als Menge.

§ 28. Thomaes Namengebung 38

III. Meinungen über Einheit und Eins.

Drückt das Zahlwort „Ein" eine Eigenschaft von Gegenständen aus?

§ 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μονάς" und „Einheit." E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein" enthält keine nähere Bestimmuug, kann nicht als Praedicat dienen 39

§ 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen 41

§ 31. Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke) 41

§ 32. Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird 42

§ 33. Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar 43

Sind die Einheiten einander gleich?

§ 34. Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit." E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich 44

Seite

§ 35. Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons 46
§ 36. Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons 46
§ 37. Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins 48
§ 38. „Eins" ist Eigenname, „Einheit" Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definirt werden. Unterschied von „und" und + ... 48
§ 39. Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit" verdeckt 50

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.

§ 40. Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons . . . 51
§ 41. Der Zweck wird nicht erreicht 53
§ 42. Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen 54
§ 43. Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1 54
§ 44. Jevons Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1 sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen 55

Lösung der Schwierigkeit.

§ 45. Rückblick 58
§ 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere 59
§ 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes 60
§ 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten 61
§ 49. Bestätigung bei Spinoza 62
§ 50. E. Schröders Ausführung 62
§ 51. Berichtigung derselben 63
§ 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche 64
§ 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl 64
§ 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit 65

Seite

IV. Der Begriff der Anzahl.

Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand.

§ 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen 67

§ 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist . . 67

§ 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen 68

§ 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar 69

§ 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist 70

§ 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt 71

§ 61. Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich 72

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.

§ 62. Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit 73

§ 63. Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird 73

§ 64. Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks 74

§ 65. Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird 76

§ 66. Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend 77

§ 67. Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist 78

§ 68. Die Anzahl als Umfang eines Begriffes 79

§ 69. Erläuterung 80

Ergänzung und Bewährung unserer Definition.

§ 70. Der Beziehungsbegriff 81

§ 71. Die Zuordnung durch eine Beziehung 83

§ 72. Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl 84

Einleitung.

Auf die Frage, was die Zahl Eins sei, oder was das Zeichen 1 bedeute, wird man meistens die Antwort erhalten: nun, ein Ding. Und wenn man dann darauf aufmerksam macht, dass der Satz

„die Zahl Eins ist ein Ding“

keine Definition ist, weil auf der einen Seite der bestimmte Artikel, auf der andern der unbestimmte steht, dass er nur besagt, die Zahl Eins gehöre zu den Dingen, aber nicht, welches Ding sie sei, so wird man vielleicht aufgefordert, sich irgendein Ding zu wählen, das man Eins nennen wolle. Wenn aber Jeder das Recht hätte, unter diesem Namen zu verstehen, was er will, so würde derselbe Satz von der Eins für Verschiedene Verschiedenes bedeuten; es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze. Einige lehnen vielleicht die Frage mit dem Hinweise darauf ab, dass auch die Bedeutung des Buchstaben a in der Arithmetik nicht angegeben werden könne; und wenn man sage: a bedeutet eine Zahl, so könne hierin derselbe Fehler gefunden werden wie in der Definition: Eins ist ein Ding. Nun ist die Ablehnung der Frage in Bezug auf a ganz gerechtfertigt: es bedeutet keine bestimmte, angebbare Zahl, sondern dient dazu, die Allgemeinheit von Sätzen auszudrücken. Wenn man für a in $a + a - a = a$ eine beliebige aber überall dieselbe Zahl

setzt, so erhält man immer eine wahre Gleichung. In diesem Sinne wird der Buchstabe a gebraucht. Aber bei der Eins liegt die Sache doch wesentlich anders. Können wir in der Gleichung $1 + 1 = 2$ für 1 beidemal denselben Gegenstand, etwa den Mond setzen? Vielmehr scheint es, dass wir für die erste 1 etwas Anderes wie für die zweite setzen müssen. Woran liegt es, dass hier grade das geschehen muss, was in jenem Falle ein Fehler wäre? Die Arithmetik kommt mit dem Buchstaben a allein nicht aus, sondern muss noch andere b, c u. s. w. gebrauchen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen allgemein auszudrücken. So sollte man denken, könnte auch das Zeichen 1 nicht genügen, wenn es in ähnlicher Weise dazu diente, den Sätzen eine Allgemeinheit zu verleihen. Aber erscheint nicht die Zahl Eins als bestimmter Gegenstand mit angebbaren Eigenschaften, z. B. mit sich selbst multiplicirt unverändert zu bleiben? In diesem Sinne kann man von a keine Eigenschaften angeben; denn was von a ausgesagt wird, ist eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlen, während $1^1 = 1$ weder vom Monde etwas aussagt, noch von der Sonne, noch von der Sahara, noch vom Pic von Teneriffa; denn was könnte der Sinn einer solchen Aussage sein?

Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist.

Viele werden das freilich nicht der Mühe werth achten. Dieser Begriff ist ja, wie sie meinen, in den Elementarbüchern hinreichend behandelt und damit für das ganze Leben abgethan. Wer glaubt denn über eine so einfache Sache noch etwas lernen zu können! Für so frei von jeder Schwierigkeit hält man den Begriff der positiven ganzen Zahl, dass er für Kinder wissenschaftlich erschöpfend behandelt werden könne, und dass Jeder ohne weiteres Nachdenken und ohne Bekanntschaft mit dem, was Andere gedacht haben, genau von ihm Bescheid wisse. So fehlt denn vielfach jene erste Vorbedingung des Lernens: das Wissen des Nichtwissens. Die Folge ist, dass man sich noch immer mit einer rohen Auffassung begnügt, obwohl schon Herbart*) eine richtigere gelehrt hat. Es ist betrübend und entmuthigend, dass in dieser Weise eine Erkenntniss immer wieder verloren zu gehen droht, die schon errungen war, dass so manche Arbeit vergeblich zu werden scheint, weil man im eingebildeten Reichthume nicht nöthig zu haben glaubt, sich ihre Früchte anzueignen. Auch diese Arbeit, sehe ich wohl, ist solcher Gefahr ausgesetzt. Jene Roheit der Auffassung tritt mir entgegen, wenn das Rechnen aggregatives, mechanisches Denken genannt wird**). Ich bezweifle, dass es ein solches Denken überhaupt giebt. Aggregatives Vorstellen könnte man schon eher gelten lassen; aber es ist für das Rechnen ohne Bedeutung. Das Denken ist im Wesentlichen überall dasselbe: es kommen nicht je nach dem Gegenstande verschiedene Arten von Denkgesetzen in Betracht. Die Unterschiede bestehen nur in der grösseren oder geringeren Reinheit und Unabhängigkeit von psychologischen Einflüssen und von äussern Hilfen des Denkens wie Sprache, Zahl-

*) Sämmtliche Werke, herausgegeb. von Hartenstein, Bd. X, 1 Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen § 252, Anm. 2: „Zwei heisst nicht zwei Dinge, sondern Verdoppelung“ u. s. w.

**) K. Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. § 94.

zeichen und dgl., dann etwa noch in der Feinheit des Baues der Begriffe; aber grade in dieser Rücksicht möchte die Mathematik von keiner Wissenschaft, selbst der Philosophie nicht, übertroffen werden.

Man wird aus dieser Schrift ersehen können, dass auch ein scheinbar eigenthümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht, dass es besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf. Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, dass sie, wie man sagt, für einen denkt. Dies beweist nicht, dass die Zahlen in einer besonders mechanischen Weise, etwa wie Sandhaufen aus Quarzkörnern gebildet sind. Es liegt, denke ich, im Interesse der Mathematiker einer solchen Ansicht entgegenzutreten, welche einen hauptsächlichen Gegenstand ihrer Wissenschaft und damit diese selbst herabzusetzen geeignet ist. Aber auch bei Mathematikern findet man ganz ähnliche Aussprüche. Im Gegentheil wird man dem Zahlbegriffe einen feineren Bau zuerkennen müssen als den meisten Begriffen andrer Wissenschaften, obwohl er noch einer der einfachsten arithmetischen ist.

Um nun jenen Wahn zu widerlegen, dass in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Uebereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehn, wie wenig von Einklang zu finden ist, sodass geradezu entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Die Einen sagen z. B.: „die Einheiten sind einander gleich", die Andern halten sie für verschieden, und beide haben Gründe für ihre Behauptung, die sich nicht kurzer Hand abweisen lassen. Hierdurch suche

ich das Bedürfniss nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von Andern ausgesprochenen Ansichten meiner eignen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, dass jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und dass meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgiltig zu entscheiden.

Freilich sind meine Ausführungen hierdurch wohl philosophischer geworden, als vielen Mathematikern angemessen scheinen mag; aber eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam.

Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wohl auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen. Wenn z. B. Stricker*) die Vorstellungen der Zahlen motorisch, von Muskelgefühlen abhängig nennt, so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss mit einem solchen Satze nichts anzufangen. Eine Arithmetik, die auf Muskelgefühle gegründet wäre, würde gewiss recht gefühlvoll, aber auch ebenso verschwommen ausfallen wie diese Grundlage. Nein, mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen. Ebensowenig mit innern Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimmte, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und

*) Studien über Association der Vorstellungen. Wien 1883.

Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände. Es mag ja von Nutzen sein, die Vorstellungen und deren Wechsel zu betrachten, die beim mathematischen Denken vorkommen; aber die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgendetwas beitragen zu können. Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleichgiltig. Stricker sagt selbst, dass er sich beim Worte „Hundert“ weiter nichts vorstellt als das Zeichen 100. Andere mögen sich den Buchstaben C oder sonst etwas vorstellen; geht daraus nicht hervor, dass diese innern Bilder in unserm Falle für das Wesen der Sache vollkommen gleichgiltig und zufällig sind, ebenso zufällig wie eine schwarze Tafel und ein Stück Kreide, dass sie überhaupt nicht Vorstellungen der Zahl Hundert zu heissen verdienen? Man sehe doch nicht das Wesen der Sache in solchen Vorstellungen! Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition und nicht die Angabe der seelischen und leiblichen Bedingungen dafür, dass uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für einen Beweis und verwechsele das Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit! Man muss, wie es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ebensowenig aufhört, wahr zu sein, wenn ich nicht mehr an ihn denke, wie die Sonne vernichtet wird, wenn ich die Augen schliesse. Sonst kommen wir noch dahin, dass man beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes es nöthig findet, des Phosphorgehaltes unseres Gehirnes zu gedenken, und dass ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: „du rechnest da $2 \cdot 2 = 4$; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weisst du, dass in jener Vergangenheit dieser Satz schon bestand? Könnten die damals lebenden Wesen nicht den Satz $2 \cdot 2 = 5$ gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung

im Kampf ums Dasein der Satz $2 \cdot 2 = 4$ entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf demselben Wege sich zu $2 \cdot 2 = 3$ fortzubilden?" Est modus in rebus, sunt certi denique fines! Die geschichtliche Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat gewiss eine grosse Berechtigung; aber sie hat auch ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen. Man denkt sich, wie es scheint, dass die Begriffe in der einzelnen Seele so entstehen, wie die Blätter an den Bäumen und meint ihr Wesen dadurch erkennen zu können, dass man ihrer Entstehung nachforscht und sie aus der Natur der menschlichen Seele psychologisch zu erklären sucht. Aber diese Auffassung zieht Alles ins Subjective und hebt, bis ans Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Was man Geschichte der Begriffe nennt, ist wohl entweder eine Geschichte unserer Erkenntniss der Begriffe oder der Bedeutungen der Wörter. Durch grosse geistige Arbeit, die Jahrhunderte hindurch andauern kann, gelingt es oft erst, einen Begriff in seiner Reinheit zu erkennen, ihn aus den fremden Umhüllungen herauszuschälen, die ihn dem geistigen Auge verbargen. Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint, fortzusetzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurückversetzt, um dort wie J. St. Mill etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken! Es fehlt nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben. Dies ist doch das grade Gegentheil eines vernünftigen Verfahrens und jedenfalls so unmathematisch wie möglich. Kein Wunder, dass die Mathematiker nichts davon wissen wollen! Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein

glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel. Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte. Freilich beweist ein solcher Vergleich nichts; aber er verdeutlicht hoffentlich meine Meinung. Es kann ja sein, dass die Geschichte der Entdeckungen in vielen Fällen als Vorbereitung für weitere Forschungen nützlich ist; aber sie darf nicht an deren Stelle treten wollen.

Dem Mathematiker gegenüber, wäre eine Bekämpfung solcher Auffassungen wohl kaum nöthig gewesen; aber da ich auch für die Philosophen die behandelten Streitfragen möglichst zum Austrage bringen wollte, war ich genöthigt, mich auf die Psychologie ein wenig einzulassen, wenn auch nur, um ihren Einbruch in die Mathematik zurückzuweisen.

Uebrigens kommen auch in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vor. Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt. Man erkennt diesen Fall leicht daran, dass im weitern Verlaufe nie mehr auf eine solche Erklärung zurückgegriffen wird. Für Lehrzwecke ist eine Hinführung auf die Sache auch ganz am Platze; nur sollte man sie von einer Definition immer deutlich unterscheiden. Dass auch Mathematiker Beweisgründe mit innern oder äussern Bedingungen der Führung eines Beweises verwechseln können, dafür liefert E. Schröder*) ein ergötzliches Beispiel, indem er unter der Ueberschrift: „Einziges Axiom“ Folgendes darbietet: „Das gedachte Princip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es giebt uns die Gewissheit, dass bei allen unsern Entwicklungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unserer

*) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

Erinnerung — noch fester aber am Papiere — haften" u. s. w.

So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muss, so wenig kann sie ihren engen Zusammenhang mit der Logik verleugnen. Ja, ich stimme der Ansicht derjenigen bei, die eine scharfe Trennung für unthunlich halten. Soviel wird man zugeben, dass jede Untersuchung über die Bündigkeit einer Beweisführung oder die Berechtigung einer Definition logisch sein muss. Solche Fragen sind aber gar nicht von der Mathematik abzuweisen, da nur durch ihre Beantwortung die nöthige Sicherheit erreichbar ist.

Auch in dieser Richtung gehe ich freilich etwas über das Uebliche hinaus. Die meisten Mathematiker sind bei Untersuchungen ähnlicher Art zufrieden, dem unmittelbaren Bedürfnisse genügt zu haben. Wenn sich eine Definition willig zu den Beweisen hergiebt, wenn man nirgends auf Widersprüche stösst, wenn sich Zusammenhänge zwischen scheinbar entlegnen Sachen erkennen lassen und wenn sich dadurch eine höhere Ordnung und Gesetzmässigkeit ergiebt, so pflegt man die Definition für genügend gesichert zu halten und fragt wenig nach ihrer logischen Rechtfertigung. Dies Verfahren hat jedenfalls das Gute, dass man nicht leicht das Ziel gänzlich verfehlt. Auch ich meine, dass die Definitionen sich durch ihre Fruchtbarkeit bewähren müssen, durch die Möglichkeit, Beweise mit ihnen zu führen. Aber es ist wohl zu beachten, dass die Strenge der Beweisführung ein Schein bleibt, mag auch die Schlusskette lückenlos sein, wenn die Definitionen nur nachträglich dadurch gerechtfertigt werden, dass man auf keinen Widerspruch gestossen ist. So hat man im Grunde immer nur eine erfahrungsmässige Sicherheit erlangt und muss eigentlich darauf gefasst sein, zuletzt doch noch einen Widerspruch anzutreffen, der das ganze Gebäude zum Einsturze bringt. Darum glaubte ich etwas weiter auf die allgemeinen logischen Grundlagen zurückgehn zu müssen, als vielleicht von den meisten Mathematikern für nöthig gehalten wird.

Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten:

es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen;

nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden;

der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten.

Um das Erste zu befolgen, habe ich das Wort „Vorstellung" immer im psychologischen Sinne gebraucht und die Vorstellungen von den Begriffen und Gegenständen unterschieden. Wenn man den zweiten Grundsatz unbeachtet lässt, ist man fast genöthigt, als Bedeutung der Wörter innere Bilder oder Thaten der einzelnen Seele zu nehmen und damit auch gegen den ersten zu verstossen. Was den dritten Punkt betrifft, so ist es nur Schein, wenn man meint, einen Begriff zum Gegenstande machen zu können, ohne ihn zu verändern. Von hieraus ergiebt sich die Unhaltbarkeit einer verbreiteten formalen Theorie der Brüche, negativen Zahlen u. s. w. Wie ich die Verbesserung denke, kann ich in dieser Schrift nur andeuten. Es wird in allen diesen Fällen wie bei den positiven ganzen Zahlen darauf ankommen, den Sinn einer Gleichung festzustellen.

Meine Ergebnisse werden, denke ich, wenigstens in der Hauptsache die Zustimmung der Mathematiker finden, welche sich die Mühe nehmen, meine Gründe in Betracht zu ziehn. Sie scheinen mir in der Luft zu liegen und einzeln sind sie vielleicht schon alle wenigstens annähernd ausgesprochen worden; aber in diesem Zusammenhange mit einander möchten sie doch neu sein. Ich habe mich manchmal gewundert, dass Darstellungen, die in Einem Punkte meiner Auffassung so nahe kommen, in andern so stark abweichen.

Die Aufnahme bei den Philosophen wird je nach dem Standpunkte verschieden sein, am schlechtesten wohl bei

jenen Empirikern, die als ursprüngliche Schlussweise nur die Induction anerkennen wollen und auch diese nicht einmal als Schlussweise, sondern als Gewöhnung. Vielleicht unterzieht Einer oder der Andere bei dieser Gelegenheit die Grundlagen seiner Erkenntnisstheorie einer erneueten Prüfung. Denen, welche etwa meine Definitionen für unnatürlich erklären möchten, gebe ich zu bedenken, dass die Frage hier nicht ist, ob natürlich, sondern ob den Kern der Sache treffend und logisch einwurfsfrei.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass bei vorurtheilsloser Prüfung auch die Philosophen einiges Brauchbare in dieser Schrift finden werden.

§ 1. Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrungsweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. Sie wurde durch die Erfindung der höhern Analysis nur gefördert; denn einerseits stellten sich einer strengen Behandlung dieser Lehren erhebliche, fast unbesiegliche Schwierigkeiten entgegen, deren Ueberwindung andrerseits die darauf verwendeten Anstrengungen wenig lohnen zu wollen schien. Doch hat die weitere Entwickelung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine blos moralische Ueberzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt. Die Grenzen der Giltigkeit sind erst dadurch in manchen Fällen festgestellt worden. Die Begriffe der Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen haben sich einer schärferen Bestimmung bedürftig gezeigt. Das Negative und die Irrationalzahl, welche längst in die Wissenschaft aufgenommen waren, haben sich einer genaueren Prüfung ihrer Berechtigung unterwerfen müssen.

So zeigt sich überall das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen.

§ 2. Dieser Weg muss im weitern Verfolge auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven ganzen Zahlen geltenden einfachsten Sätze führen, welche die Grundlage der ganzen Arithmetik bilden. Freilich sind Zahlformeln wie $5 + 7 = 12$ und Gesetze wie das der Associativität bei der Addition durch die unzähligen Anwendungen, die tagtäglich von ihnen gemacht werden, so vielfach bestätigt, dass es fast lächerlich erscheinen kann, sie durch das Verlangen nach einem Beweise in Zweifel ziehen zu wollen. Aber es liegt im Wesen der Mathematik begründet, dass sie überall, wo ein Beweis möglich ist, ihn der Bewährung durch Induction vorzieht. Euklid beweist Vieles, was ihm jeder ohnehin zugestehen würde. Indem man sich selbst an der euklidischen Strenge nicht genügen liess, ist man auf die Untersuchungen geführt worden, welche sich an das Parallelenaxiom geknüpft haben.

So ist jene auf grösste Strenge gerichtete Bewegung schon vielfach über das zunächst gefühlte Bedürfniss hinausgegangen und dieses ist an Ausdehnung und Stärke immer gewachsen.

Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück; und diese Vereinfachung ist an sich schon ein erstrebenswerthes Ziel. Vielleicht bestätigt sich auch die Hoffnung, dass man allgemeine Weisen der Begriffsbildung oder der Begründung gewinnen könne, die auch in verwickelteren Fällen verwendbar sind, indem man zum Bewusstsein bringt, was die Menschen in den einfachsten Fällen instinctiv gethan haben, und das Allgemeingiltige daraus abscheidet.

§ 3. Mich haben auch philosophische Beweggründe zu solchen Untersuchungen bestimmt. Die Fragen nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten harren hier ihrer Beantwortung. Denn, wenn auch diese Begriffe selbst der Philosophie angehören, so glaube ich doch, dass die Entscheidung nicht ohne Beihilfe der Mathematik erfolgen kann. Freilich hangt dies von dem Sinne ab, den man jenen Fragen beilegt.

Es ist kein seltener Fall, dass man zuerst den Inhalt eines Satzes gewinnt und dann auf einem andern beschwerlicheren Wege den strengen Beweis führt, durch den man oft auch die Bedingungen der Giltigkeit genauer kennen lernt. So hat man allgemein die Frage, wie wir zu dem Inhalte eines Urtheils kommen, von der zu trennen, woher wir die Berechtigung für unsere Behauptung nehmen.

Jene Unterscheidungen von apriori und aposteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner*) Auffassung nicht den Inhalt des Urtheils, sondern die Berechtigung zur Urtheilsfällung. Da, wo diese fehlt, fällt auch die Möglichkeit jener Eintheilung weg. Ein Irrthum apriori ist dann ein ebensolches Unding wie etwa ein blauer Begriff. Wenn man einen Satz in meinem Sinne aposteriori oder analytisch nennt, so urtheilt man nicht über die psychologischen, physiologischen und physikalischen Verhältnisse, die es möglich gemacht haben, den Inhalt des Satzes im Bewusstsein zu bilden, auch nicht darüber, wie ein Anderer vielleicht irrthümlicherweise dazu gekommen ist, ihn für wahr zu halten, sondern darüber, worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens beruht.

Dadurch wird die Frage dem Gebiete der Psychologie entrückt und dem der Mathematik zugewiesen, wenn es sich

*) Ich will damit natürlich nicht einen neuen Sinn hineinlegen, sondern nur das treffen, was frühere Schriftsteller, insbesondere Kant gemeint haben.

um eine mathemathische Wahrheit handelt. Es kommt nun darauf an, den Beweis zu finden und ihn bis auf die Urwahrheiten zurückzuverfolgen. Stösst man auf diesem Wege nur auf die allgemeinen logischen Gesetze und auf Definitionen, so hat man eine analytische Wahrheit, wobei vorausgesetzt wird, dass auch die Sätze mit in Betracht gezogen werden, auf denen etwa die Zulässigkeit einer Definition beruht. Wenn es aber nicht möglich ist, den Beweis zu führen, ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf ein besonderes Wissensgebiet beziehen, so ist der Satz ein synthetischer. Damit eine Wahrheit aposteriori sei, wird verlangt, dass ihr Beweis nicht ohne Berufung auf Thatsachen auskomme; d. h. auf unbeweisbare Wahrheiten ohne Allgemeinheit, die Aussagen von bestimmten Gegenständen enthalten. Ist es dagegen möglich, den Beweis ganz aus allgemeinen Gesetzen zu führen, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, so ist die Wahrheit apriori.*)

§ 4. Von diesen philosophischen Fragen ausgehend kommen wir zu derselben Forderung, welche unabhängig davon auf dem Gebiete der Mathematik selbst erwachsen ist: die Grundsätze der Arithmetik, wenn irgend möglich, mit grösster Strenge zu beweisen; denn nur wenn aufs sorgfältigste jede Lücke in der Schlusskette vermieden wird, kann man mit Sicherheit sagen, auf welche Urwahrheiten sich der Beweis stützt; und nur wenn man diese kennt, wird man jene Fragen beantworten können.

*) Wenn man überhaupt allgemeine Wahrheiten anerkennt, so muss man auch zugeben, dass es solche Urgesetze giebt, weil aus lauter einzelnen Thatsachen nichts folgt, es sei denn auf Grund eines Gesetzes. Selbst die Induction beruht auf dem allgemeinen Satze, dass dies Verfahren die Wahrheit oder doch eine Wahrscheinlichkeit für ein Gesetz begründen könne. Für den, der dies leugnet, ist die Induction nichts weiter als eine psychologische Erscheinung, eine Weise, wie Menschen zu dem Glauben an die Wahrheit eines Satzes kommen, ohne dass dieser Glaube dadurch irgendwie gerechtfertigt wäre.

Wenn man nun dieser Forderung nachzukommen versucht, so gelangt man sehr bald zu Sätzen, deren Beweis solange unmöglich ist, als es nicht gelingt, darin vorkommende Begriffe in einfachere aufzulösen oder auf Allgemeineres zurückzuführen. Hier ist es nun vor allen die Anzahl, welche definirt oder als undefinirbar anerkannt werden muss. Das soll die Aufgabe dieses Buches sein.*) Von ihrer Lösung wird die Entscheidung über die Natur der arithmetischen Gesetze abhangen.

Bevor ich diese Fragen selbst angreife, will ich Einiges vorausschicken, was Fingerzeige für ihre Beantwortung geben kann. Wenn sich nämlich von andern Gesichtspunkten aus Gründe dafür ergeben, dass die Grundsätze der Arithmetik analytisch sind, so sprechen diese auch für deren Beweisbarkeit und für die Definirbarkeit des Begriffes der Anzahl. Die entgegengesetzte Wirkung werden die Gründe für die Aposteriorität dieser Wahrheiten haben. Deshalb mögen diese Streitpunkte zunächst einer vorläufigen Beleuchtung unterworfen werden.

I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze.

Sind die Zahlformeln beweisbar?

§ 5. Man muss die Zahlformeln, die wie $2 + 3 = 5$ von bestimmten Zahlen handeln, von den allgemeinen Gesetzen unterscheiden, die von allen ganzen Zahlen gelten.

Jene werden von einigen Philosophen**) für unbeweisbar und unmittelbar klar wie Axiome gehalten. Kant***) er-

*) Es wird also im Folgenden, wenn nichts weiter bemerkt wird, von keinen andern Zahlen als den positiven ganzen die Rede sein, welche auf die Frage wie viele? antworten.

**) Hobbes, Locke, Newton. Vergl. Baumann, die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik. S. 241 u. 242, S. 365 ff., S. 475.

***) Kritik der reinen Vernunft herausgeg. v. Hartenstein. III. S. 157.

klärt sie für unbeweisbar und synthetisch, scheut sich aber, sie Axiome zu nennen, weil sie nicht allgemein sind, und weil ihre Zahl unendlich ist. Hankel*) nennt mit Recht diese Annahme von unendlich vielen unbeweisbaren Urwahrheiten unangemessen und paradox. Sie widerstreitet in der That dem Bedürfnisse der Vernunft nach Uebersichtlichkeit der ersten Grundlagen. Und ist es denn unmittelbar einleuchtend, dass

$$135664 + 37863 = 173527$$

ist? Nein! und eben dies führt Kant für die synthetische Natur dieser Sätze an. Es spricht aber vielmehr gegen ihre Unbeweisbarkeit; denn wie sollen sie anders eingesehen werden als durch einen Beweis, da sie unmittelbar nicht einleuchten? Kant will die Anschauung von Fingern oder Punkten zu Hilfe nehmen, wodurch er in Gefahr geräth, diese Sätze gegen seine Meinung als empirische erscheinen zu lassen; denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine. Der Ausdruck „Anschauung" scheint auch nicht recht zu passen, da schon 10 Finger durch ihre Stellungen zu einander die verschiedensten Anschauungen hervorrufen können. Haben wir denn überhaupt eine Anschauung von 135664 Fingern oder Punkten? Hätten wir sie und hätten wir eine von 37863 Fingern und eine von 173527 Fingern, so müsste die Richtigkeit unserer Gleichung sofort einleuchten, wenigstens für Finger, wenn sie unbeweisbar wäre; aber dies ist nicht der Fall.

Kant hat offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt. Dann würden die Formeln für grosse Zahlen beweisbar sein, die für kleine durch die Anschauung unmittelbar einleuchten. Aber es ist misslich, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, besonders da eine scharfe Grenze nicht zu ziehen sein möchte. Wenn

*) Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen. S. 55.

die Zahlformeln etwa von 10 an beweisbar wären, so würde man mit Recht fragen: warum nicht von 5 an, von 2 an, von 1 an?

§ 6. Andere Philosophen und Mathematiker haben denn auch die Beweisbarkeit der Zahlformeln behauptet. Leibniz*) sagt:

„Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so:

Definitionen: 1) 2 ist 1 und 1,
2) 3 ist 2 und 1,
3) 4 ist 3 und 1.

Axiom: Wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.

Beweis: $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4.$
Def. 1. Def. 2. Def. 3.

Also: nach dem Axiom: $2 + 2 = 4$."

Dieser Beweis scheint zunächst ganz aus Definitionen und dem angeführten Axiome aufgebaut zu sein. Auch dieses könnte in eine Definition verwandelt werden, wie es Leibniz an einem andern Orte**) selbst gethan hat. Es scheint, dass man von 1, 2, 3, 4 weiter nichts zu wissen braucht, als was in den Definitionen enthalten ist. Bei genauerer Betrachtung entdeckt man jedoch eine Lücke, die durch das Weglassen der Klammern verdeckt ist. Genauer müsste nämlich geschrieben werden:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Hier fehlt der Satz

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1,$$

der ein besonderer Fall von

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

ist. Setzt man dies Gesetz voraus, so sieht man leicht, dass

*) Nouveaux Essais, IV. § 10. Erdm. S. 363.

**) Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

jede Formel des Einsundeins so bewiesen werden kann. Es ist dann jede Zahl aus der vorhergehenden zu definiren. In der That sehe ich nicht, wie uns etwa die Zahl 437986 angemessener gegeben werden könnte als in der leibnizischen Weise. Wir bekommen sie so, auch ohne eine Vorstellung von ihr zu haben, doch in unsere Gewalt. Die unendliche Menge der Zahlen wird durch solche Definitionen auf die Eins und die Vermehrung um eins zurückgeführt, und jede der unendlich vielen Zahlformeln kann aus einigen allgemeinen Sätzen bewiesen werden.

Dies ist auch die Meinung von H. Grassmann und H. Hankel. Jener will das Gesetz

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

durch eine Definition gewinnen, indem er sagt*):

„Wenn a und b beliebige Glieder der Grundreihe sind, so versteht man unter der Summe a + b dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel

$$a + (b + e) = a + b + e$$

gilt."

Hierbei soll e die positive Einheit bedeuten. Gegen diese Erklärung lässt sich zweierlei einwenden. Zunächst wird die Summe durch sich selbst erklärt. Wenn man noch nicht weiss, was a + b bedeuten soll, versteht man auch den Ausdruck a + (b + e) nicht. Aber dieser Einwand lässt sich vielleicht dadurch beseitigen, dass man freilich im Widerspruch mit dem Wortlaute sagt, nicht die Summe, sondern die Addition solle erklärt werden. Dann würde immer noch eingewendet werden können, dass a + b ein leeres Zeichen wäre, wenn es kein Glied der Grundreihe oder deren mehre von der verlangten Art gäbe. Dass dies nicht statthabe, setzt Grassmann einfach voraus, ohne es zu beweisen, sodass die Strenge nur scheinbar ist.

*) Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. I. Theil: Arithmetik, Stettin 1860, S. 4.

§ 7. Man sollte denken, dass die Zahlformeln synthetisch oder analytisch, aposteriori oder apriori sind, je nachdem die allgemeinen Gesetze es sind, auf die sich ihr Beweis stützt. Dem steht jedoch die Meinung John Stuart Mill's entgegen. Zwar scheint er zunächst wie Leibniz die Wissenschaft auf Definitionen gründen zu wollen,*) da er die einzelnen Zahlen wie dieser erklärt; aber sein Vorurtheil, dass alles Wissen empirisch sei, verdirbt sofort den richtigen Gedanken wieder. Er belehrt uns nämlich,**) dass jene Definitionen keine im logischen Sinne seien, dass sie nicht nur die Bedeutung eines Ausdruckes festsetzen, sondern damit auch eine beobachtete Thatsache behaupten. Was in aller Welt mag die beobachtete oder, wie Mill auch sagt, physikalische Thatsache sein, die in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird? Von dem ganzen Reichthume an physikalischen Thatsachen, der sich hier vor uns aufthut, nennt uns Mill nur eine einzige, die in der Definition der Zahl 3 behauptet werden soll. Sie besteht nach ihm darin, dass es Zusammenfügungen von Gegenständen giebt, welche, während sie diesen Eindruck °o° auf die Sinne machen, in zwei Theile getrennt werden können, wie folgt: o o o. Wie gut doch, dass nicht Alles in der Welt niet- und nagelfest ist; dann könnten wir diese Trennung nicht vornehmen, und 2 + 1 wäre nicht 3! Wie schade, dass Mill nicht auch die physikalischen Thatsachen abgebildet hat, welche den Zahlen 0 und 1 zu Grunde liegen!

Mill fährt fort: „Nachdem dieser Satz zugegeben ist, nennen wir alle dergleichen Theile 3". Man erkennt hieraus, dass es eigentlich unrichtig ist, wenn die Uhr drei schlägt, von drei Schlägen zu sprechen, oder süss, sauer, bitter drei Geschmacksempfindungen zu nennen; ebensowenig

*) System der deductiven und inductiven Logik. übersetzt von J. Schiel. III. Buch, XXIV. Cap, § 5.

**) A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 2.

ist der Ausdruck „drei Auflösungsweisen einer Gleichung“ zu billigen; denn man hat niemals davon den sinnlichen Eindruck wie von $^0/_0$.

Nun sagt Mill: „Die Rechnungen folgen nicht aus der Definition selbst, sondern aus der beobachteten Thatsache.“ Aber wo hätte sich Leibniz in dem oben mitgetheilten Beweise des Satzes $2 + 2 = 4$ auf die erwähnte Thatsache berufen sollen? Mill unterlässt es die Lücke nachzuweisen, obwohl er einen dem leibnizischen ganz entsprechenden Beweis des Satzes $5 + 2 = 7$ giebt.*) Die wirklich vorhandene Lücke, die in dem Weglassen der Klammern liegt, übersieht er wie Leibniz.

Wenn wirklich die Definition jeder einzelnen Zahl eine besondere physikalische Thatsache behauptete, so würde man einen Mann, der mit neunziffrigen Zahlen rechnet, nicht genug wegen seines physikalischen Wissens bewundern können. Vielleicht geht indessen Mill's Meinung nicht dahin, dass alle diese Thatsachen einzeln beobachtet werden müssten, sondern es genüge, durch Induction ein allgemeines Gesetz abgeleitet zu haben, in dem sie sämmtlich eingeschlossen seien. Aber man versuche, dies Gesetz auszusprechen, und man wird finden, dass es unmöglich ist. Es reicht nicht hin, zu sagen: es giebt grosse Sammlungen von Dingen, die zerlegt werden können; denn damit ist nicht gesagt, dass es so grosse Sammlungen und von der Art giebt, wie zur Definition etwa der Zahl 1000000 erfordert werden, und die Weise der Theilung ist auch nicht genauer angegeben. Die millsche Auffassung führt nothwendig zu der Forderung, dass für jede Zahl eine Thatsache besonders beobachtet werde, weil in einem allgemeinen Gesetze grade das Eigenthümliche der Zahl 1000000, das zu deren Definition nothwendig gehört, verloren gehen würde. Man dürfte nach Mill in der That nicht setzen $1000000 = 999999 + 1$,

*) A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

wenn man nicht grade diese eigenthümliche Weise der Zerlegung einer Sammlung von Dingen beobachtet hätte, die von der irgendeiner andern Zahl zukommenden verschieden ist.

§ 8. Mill scheint zu meinen, dass die Definitionen $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ u. s. w. nicht gemacht werden dürften, ehe nicht die von ihm erwähnten Thatsachen beobachtet wären. In der That darf man die 3 nicht als $(2 + 1)$ definiren, wenn man mit $(2 + 1)$ gar keinen Sinn verbindet. Es fragt sich aber, ob es dazu nöthig ist, jene Sammlung und ihre Trennung zu beobachten. Räthselhaft wäre dann die Zahl 0; denn bis jetzt hat wohl niemand 0 Kieselsteine gesehen oder getastet. Mill würde gewiss die 0 für etwas Sinnloses, für eine blosse Redewendung erklären; die Rechnungen mit 0 würden ein blosses Spiel mit leeren Zeichen sein, und es wäre nur wunderbar, wie etwas Vernünftiges dabei herauskommen könnte. Wenn aber diese Rechnungen eine ernste Bedeutung haben, so kann auch das Zeichen 0 selber nicht ganz sinnlos sein. Und es zeigt sich die Möglichkeit, dass $2 + 1$ in ähnlicher Weise wie die 0, einen Sinn auch dann noch haben könnte, wenn die von Mill erwähnte Thatsache nicht beobachtet wäre. Wer will in der That behaupten, dass die in der Definition einer 18ziffrigen Zahl nach Mill enthaltene Thatsache je beobachtet sei, und wer will leugnen, dass ein solches Zahlzeichen trotzdem einen Sinn habe?

Vielleicht meint man, es würden die physikalischen Thatsachen nur für die kleineren Zahlen etwa bis 10 gebraucht, indem die übrigen aus diesen zusammengesetzt werden könnten. Aber, wenn man 11 aus 10 und 1 blos durch Definition bilden kann, ohne die entsprechende Sammlung gesehen zu haben, so ist kein Grund, weshalb man nicht auch die 2 aus 1 und 1 so zusammensetzen kann. Wenn die Rechnungen mit der Zahl 11 nicht aus einer für diese bezeichnenden Thatsache folgen, wie kommt es, dass die Rechnungen mit der 2 sich auf die Beobachtung einer gewissen

Sammlung und deren eigenthümlicher Trennung stützen müssen?

Man fragt vielleicht, wie die Arithmetik bestehen könne, wenn wir durch die Sinne gar keine oder nur drei Dinge unterscheiden könnten. Für unsere Kenntniss der arithmetischen Sätze und deren Anwendungen würde ein solcher Zustand gewiss etwas Missliches haben, aber auch für ihre Wahrheit? Wenn man einen Satz empirisch nennt, weil wir Beobachtungen gemacht haben müssen, um uns seines Inhalts bewusst zu werden, so gebraucht man das Wort „empirisch" nicht in dem Sinne, dass es dem „apriori" entgegengesetzt ist. Man spricht dann eine psychologische Behauptung aus, die nur den Inhalt des Satzes betrifft; ob dieser wahr sei, kommt dabei nicht in Betracht. In dem Sinne sind auch alle Geschichten Münchhausens empirisch; denn gewiss muss man mancherlei beobachtet haben, um sie erfinden zu können.

Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten?

§ 9. Die bisherigen Erwägungen machen es wahrscheinlich, dass die Zahlformeln allein aus den Definitionen der einzelnen Zahlen mittels einiger allgemeinen Gesetze ableitbar sind, dass diese Definitionen beobachtete Thatsachen weder behaupten noch zu ihrer Rechtmässigkeit voraussetzen. Es kommt also darauf an, die Natur jener Gesetze zu erkennen.

Mill*) will zu seinem vorhin erwähnten Beweise der Formel $5 + 2 = 7$ den Satz „was aus Theilen zusammengesetzt ist, ist aus Theilen von diesen Theilen zusammengesetzt" benutzen. Dies hält er für einen charakteristischern Ausdruck des sonst in der Form „die Summen von Gleichem sind gleich" bekannten Satzes. Er nennt ihn inductive Wahrheit und Naturgesetz von der höchsten Ordnung. Für

*) A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

die Ungenauigkeit seiner Darstellung ist es bezeichnend, dass er diesen Satz gar nicht an der Stelle des Beweises heranzieht, wo er nach seiner Meinung unentbehrlich ist; doch scheint es, dass seine inductive Wahrheit Leibnizens Axiom vertreten soll: „wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.“ Aber um arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennen zu können, legt Mill einen Sinn hinein, den sie nicht haben. Er meint z. B.*) die Gleichung $1 = 1$ könne falsch sein, weil ein Pfundstück nicht immer genau das Gewicht eines andern habe. Aber das will der Satz $1 = 1$ auch gar nicht behaupten.

Mill versteht das $+$ Zeichen so, dass dadurch die Beziehung der Theile eines physikalischen Körpers oder eines Haufens zu dem Ganzen ausgedrückt werde; aber das ist nicht der Sinn dieses Zeichens. $5 + 2 = 7$ bedeutet nicht, dass wenn man zu 5 Raumtheilen Flüssigkeit 2 Raumtheile Flüssigkeit giesst, man 7 Raumtheile Flüssigkeit erhalte, sondern dies ist eine Anwendung jenes Satzes, die nur statthaft ist, wenn nicht infolge etwa einer chemischen Einwirkung eine Volumänderung eintritt. Mill verwechselt immer Anwendungen, die man von einem arithmetischen Satze machen kann, welche oft physikalisch sind und beobachtete Thatsachen zur Voraussetzung haben, mit dem rein mathematischen Satze selber. Das Pluszeichen kann zwar in manchen Anwendungen einer Haufenbildung zu entsprechen scheinen; aber dies ist nicht seine Bedeutung; denn bei andern Anwendungen kann von Haufen, Aggregaten, dem Verhältnisse eines physikalischen Körpers zu seinen Theilen keine Rede sein, z. B. wenn man die Rechnung auf Ereignisse bezieht. Zwar kann man auch hier von Theilen sprechen; dann gebraucht man das Wort aber nicht im physikalischen oder geometrischen, sondern im logischen Sinne, wie wenn man die Ermordungen von Staatsoberhäuptern einen Theil

*) A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 3.

aber das kann hier wenig nützen. Ebenso wenig wird es uns bei den Zahlen nützen, dass sie sämmtlich unter den Begriff „was man durch fortgesetzte Vermehrung um eins erhält" fallen. Man kann eine Verschiedenheit der beiden Fälle darin finden, dass die Schichten nur angetroffen werden, die Zahlen aber durch die fortgesetzte Vermehrung um eins geradezu geschaffen und ihrem ganzen Wesen nach bestimmt werden. Dies kann nur heissen, dass man aus der Weise, wie eine Zahl, z. B. 8, durch Vermehrung um 1 entstanden ist, alle ihre Eigenschaften ableiten kann. Damit giebt man im Grunde zu, dass die Eigenschaften der Zahlen aus ihren Definitionen folgen, und es eröffnet sich die Möglichkeit, die allgemeinen Gesetze der Zahlen aus der allen gemeinsamen Entstehungsweise zu beweisen, während die besondern Eigenschaften der einzelnen aus der besondern Weise zu folgern wären, wie sie durch fortgesetzte Vermehrung um eins gebildet sind. So kann man auch, was bei den Erdschichten, schon durch die Tiefe allein bestimmt ist, in der sie getroffen werden, also ihre Lagenverhältnisse, eben daraus schliessen, ohne dass man die Induction nöthig hätte; was aber nicht dadurch bestimmt ist, kann auch die Induction nicht lehren.

Vermuthlich kann das Verfahren der Induction selbst nur mittels allgemeiner Sätze der Arithmetik gerechtfertigt werden, wenn man darunter nicht eine blosse Gewöhnung versteht. Diese hat nämlich durchaus keine wahrheitverbürgende Kraft. Während das wissenschaftliche Verfahren nach objectiven Maasstäben bald in einer einzigen Bestätigung eine hohe Wahrscheinlichkeit begründet findet, bald tausendfaches Eintreffen fast für werthlos erachtet, wird die Gewöhnung durch Zahl und Stärke der Eindrücke und subjective Verhältnisse bestimmt, die keinerlei Recht haben, auf das Urtheil Einfluss zu üben. Die Induction muss sich auf die Lehre von der Wahrscheinlichkeit stützen, weil sie einen Satz nie mehr als wahrscheinlich machen kann. Wie

diese Lehre aber ohne Voraussetzung arithmetischer Gesetze entwickelt werden könne, ist nicht abzusehen.

§ 11. Leibniz*) meint dagegen, dass die nothwendigen Wahrheiten, wie man solche in der Arithmetik findet, Principien haben müssen, deren Beweis nicht von den Beispielen und also nicht von dem Zeugnisse der Sinne abhangt, wiewohl ohne die Sinne sich niemand hätte einfallen lassen, daran zu denken. „Die ganze Arithmetik ist uns eingeboren und in uns auf virtuelle Weise.“ Wie er den Ausdruck „eingeboren“ meint, verdeutlicht eine andere Stelle**): „Es ist nicht wahr, dass alles, was man lernt, nicht eingeboren sei; — die Wahrheiten der Zahlen sind in uns, und nichtsdestoweniger lernt man sie, sei es, indem man sie aus ihrer Quelle zieht, wenn man sie auf beweisende Art lernt (was eben zeigt, dass sie eingeboren sind), sei es . . . .“.

Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch apriori oder analytisch?

§ 12. Wenn man den Gegensatz von analytisch und synthetisch hinzunimmt, ergeben sich vier Combinationen, von denen jedoch eine, nämlich

analytisch aposteriori

ausfällt. Wenn man sich mit Mill für aposteriori entschieden hat, bleibt also keine Wahl, sodass für uns nur noch die Möglichkeiten

synthetisch apriori

und

analytisch

zu erwägen bleiben. Für die erstere entscheidet sich Kant.

*) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 13 u. 14; Erdm. S. 195, S. 208 u. 209.

**) Baumann a. a. O. Bd. II., S. 38; Erdm. S. 212.

In diesem Falle bleibt wohl nichts übrig, als eine reine Anschauung als letzten Erkenntnissgrund anzurufen, obwohl hier schwer zu sagen ist, ob es eine räumliche oder zeitliche ist, oder welche es sonst sein mag. Baumann*) stimmt Kant, wenngleich mit etwas anderer Begründung, bei. Auch nach Lipschitz**) fliessen die Sätze, welche die Unabhängigkeit der Anzahl von der Art des Zählens und die Vertauschbarkeit und Gruppirbarkeit der Summanden behaupten, aus der inneren Anschauung. Hankel***) gründet die Lehre von den reellen Zahlen auf drei Grundsätze, denen er den Charakter der notiones communes zuschreibt: „Sie werden durch Explication vollkommen evident, gelten für alle Grössengebiete nach der reinen Anschauung der Grösse und können, ohne ihren Charakter einzubüssen, in Definitionen verwandelt werden, indem man sagt: Unter der Addition von Grössen versteht man eine Operation, welche diesen Sätzen genügt.“ In der letzten Behauptung liegt eine Unklarheit. Vielleicht kann man die Definition machen; aber sie kann keinen Ersatz für jene Grundsätze bilden; denn bei der Anwendung würde es sich immer darum handeln: sind die Anzahlen Grössen, und ist das, was man Addition der Anzahlen zu nennen pflegt, Addition im Sinne dieser Definition? Und zur Beantwortung müsste man jene Sätze von den Anzahlen schon kennen. Ferner erregt der Ausdruck „reine Anschauung der Grösse“ Anstoss. Wenn man erwägt, was alles Grösse genannt wird: Anzahlen, Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel, Krümmungen, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Lichtstärken, galvanische Stromstärken u. s. f., so ist wohl zu verstehen, wie man dies einem Grössenbegriffe unterordnen kann; aber der Ausdruck „Anschauung der Grösse“ und gar „reine An-

*) A. a. O. Bd. II., S. 669.

**) Lehrbuch der Analysis, Bd. I., S. 1.

***) Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 54 u. 55.

schauung der Grösse" kann nicht als zutreffend anerkannt werden. Ich kann nicht einmal eine Anschauung von 100000 zugeben, noch viel weniger von Zahl im Allgemeinen oder gar von Grösse im Allgemeinen. Man beruft sich zu leicht auf innere Anschauung, wenn man keinen andern Grund anzugeben vermag. Aber man sollte dabei den Sinn des Wortes „Anschauung" doch nicht ganz aus dem Auge verlieren.

Kant definirt in der Logik (ed. Hartenstein, VIII, S. 88):

„Die Anschauung ist eine einzelne Vorstellung (repraesentatio singularis), der Begriff eine allgemeine (repraesentatio per notas communes) oder reflectirte Vorstellung (repraesentatio discursiva)."

Hier kommt die Beziehung zur Sinnlichkeit gar nicht zum Ausdrucke, die doch in der transcendentalen Aesthetik hinzugedacht wird, und ohne welche die Anschauung nicht als Erkenntnissprincip für die synthetischen Urtheile apriori dienen kann. In der Kr. d. r. V. (ed. Hartenstein III, S. 55) heisst es:

„Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben und sie allein liefert uns Anschauungen."

Der Sinn unseres Wortes in der Logik ist demnach ein weiterer als in der trancendentalen Aesthetik. Im logischen Sinne könnte man vielleicht 100000 eine Anschauung nennen; denn ein allgemeiner Begriff ist es nicht. Aber in diesem Sinne genommen, kann die Anschauung nicht zur Begründung der arithmetischen Gesetze dienen.

§ 13. Ueberhaupt wird es gut sein, die Verwandtschaft mit der Geometrie nicht zu überschätzen. Ich habe schon eine leibnizische Stelle dagegen angeführt. Ein geometrischer Punkt für sich betrachtet, ist von irgendeinem andern gar nicht zu unterscheiden; dasselbe gilt von Geraden und Ebenen. Erst wenn mehre Punkte, Gerade, Ebenen in einer Anschauung gleichzeitig aufgefasst werden, unterscheidet man sie. Wenn in der Geometrie allgemeine Sätze aus der

Anschauung gewonnen werden, so ist das daraus erklärlich, dass die angeschauten Punkte, Geraden, Ebenen eigentlich gar keine besondern sind und daher als Vertreter ihrer ganzen Gattung gelten können. Anders liegt die Sache bei den Zahlen: jede hat ihre Eigenthümlichkeit. Inwiefern eine bestimmte Zahl alle andern vertreten kann, und wo ihre Besonderheit sich geltend macht, ist ohne Weiteres nicht zu sagen.

§ 14. Auch die Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet spricht gegen die empirische und synthetische Natur der arithmetischen Gesetze.

Die Erfahrungssätze gelten für die physische oder psychologische Wirklichkeit, die geometrischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des räumlich Anschaulichen, mag es nun Wirklichkeit oder Erzeugniss der Einbildungskraft sein. Die tollsten Fieberphantasien, die kühnsten Erfindungen der Sage und der Dichter, welche Thiere reden, Gestirne stille stehen lassen, aus Steinen Menschen und aus Menschen Bäume machen, und lehren, wie man sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zieht, sie sind doch, sofern sie anschaulich bleiben, an die Axiome der Geometrie gebunden. Von diesen kann nur das begriffliche Denken in gewisser Weise loskommen, wenn es etwa einen Raum von vier Dimensionen oder von positivem Krümmungsmaasse annimmt. Solche Betrachtungen sind durchaus nicht unnütz; aber sie verlassen ganz den Boden der Anschauung. Wenn man diese auch dabei zu Hilfe nimmt, so ist es doch immer die Anschauung des euklidischen Raumes, des einzigen, von dessen Gebilden wir eine haben. Sie wird dann nur nicht so, wie sie ist, sondern symbolisch für etwas anderes genommen; man nennt z. B. gerade oder eben, was man doch als Krummes anschaut. Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne dass man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird, wenn man Schlussfolgerungen

aus solchen der Anschauung widerstreitenden Annahmen zieht. Diese Möglichkeit zeigt, dass die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen? Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?

§ 15. Dass Leibnizens Aussprüche sich nur zu Gunsten der analytischen Natur der Zahlgesetze deuten lassen, ist vorauszusehen, da für ihn das Apriori mit dem Analytischen zusammenfällt. So sagt er*), dass die Algebra ihre Vortheile einer viel höhern Kunst, nämlich der wahren Logik entlehne. An einer andern Stelle**) vergleicht er die nothwendigen und zufälligen Wahrheiten mit den commensurabeln und incommensurabeln Grössen und meint, dass bei nothwendigen Wahrheiten ein Beweis oder eine Zurückführung auf Identitäten möglich sei. Doch diese Aeusserungen verlieren dadurch an Gewicht, dass Leibniz dazu neigt, alle Wahrheiten als beweisbar anzusehen***): „. . . . dass jede Wahrheit ihren apriorischen, aus dem Begriff der Termini gezogenen Beweis hat, wiewohl es nicht immer in unserer Macht steht, zu dieser Analyse zu kommen.“ Der Vergleich mit der Commensurabilität und Incommensurabilität richtet freilich doch wieder eine für uns wenigstens unüber-

*) Baumann a. a. O. Bd. II., S. 56; Erdm. S. 424.
**) Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Erdm. S. 83.
***) Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Pertz, II., S. 55.

schreitbare Schranke zwischen zufälligen und nothwendigen Wahrheiten auf.

Sehr entschieden im Sinne der analytischen Natur der Zahlgesetze spricht sich W. Stanley Jevons aus*): „Zahl ist nur logische Unterscheidung und Algebra eine hoch entwickelte Logik."

§ 16. Aber auch diese Ansicht hat ihre Schwierigkeiten. Soll dieser hochragende, weitverzweigte und immer noch wachsende Baum der Zahlenwissenschaft in blossen Identitäten wurzeln? Und wie kommen die leeren Formen der Logik dazu, aus sich heraus solchen Inhalt zu gewinnen?

Mill meint: „Die Lehre, dass wir durch kunstfertiges Handhaben der Sprache Thatsachen entdecken, die verborgene Naturprocesse enthüllen können, ist dem gesunden Menschenverstande so entgegen, dass es schon einen Fortschritt in der Philosophie verlangt, um sie zu glauben".

Gewiss dann, wenn man sich bei dem kunstfertigen Handhaben nichts denkt. Mill wendet sich hier gegen einen Formalismus, der kaum von irgendwem vertreten wird. Jeder, der Worte oder mathematische Zeichen gebraucht, macht den Anspruch, dass sie etwas bedeuten, und niemand wird erwarten, dass aus leeren Zeichen etwas Sinnvolles hervorgehe. Aber es ist möglich, dass ein Mathematiker längere Rechnungen vollführt, ohne unter seinen Zeichen etwas sinnlich Wahrnehmbares, Anschauliches zu verstehen. Darum sind diese Zeichen noch nicht sinnlos; man unterscheidet dennoch ihren Inhalt von ihnen selbst, wenn dieser auch vielleicht nur mittels der Zeichen fassbar wird. Man ist sich bewusst, dass andere Zeichen für Dasselbe hätten festgesetzt werden können. Es genügt zu wissen, wie der in den Zeichen versinnlichte Inhalt logisch zu behandeln ist, und wenn man Anwendungen auf die Physik machen will, wie der Uebergang zu den Erscheinungen geschehen

*) The principles of science. London 1879. S. 156.

muss. Aber in einer solchen Anwendung ist nicht der eigentliche Sinn der Sätze zu sehen. Dabei geht immer ein grosser Theil der Allgemeinheit verloren, und es kommt etwas Besonderes hinein, das bei andern Anwendungen durch Anderes ersetzt wird.

§ 17. Man kann trotz aller Herabsetzung der Deduction doch nicht leugnen, dass die durch Induction begründeten Gesetze nicht genügen. Aus ihnen müssen neue Sätze abgeleitet werden, die in keinem einzelnen von jenen enthalten sind. Dass sie in allen zusammen schon in gewisser Weise stecken, entbindet nicht von der Arbeit, sie daraus zu entwickeln und für sich herauszustellen. Damit eröffnet sich folgende Möglichkeit. Statt eine Schlussreihe unmittelbar an eine Thatsache anzuknüpfen, kann man, diese dahingestellt sein lassend, ihren Inhalt als Bedingung mitführen. Indem man so alle Thatsachen in einer Gedankenreihe durch Bedingungen ersetzt, wird man das Ergebniss in der Form erhalten, dass von einer Reihe von Bedingungen ein Erfolg abhängig gemacht ist. Diese Wahrheit wäre durch Denken allein, oder, um mit Mill zu reden, durch kunstfertiges Handhaben der Sprache begründet. Es ist nicht unmöglich, dass die Zahlgesetze von dieser Art sind. Sie wären dann analytische Urtheile, obwohl sie nicht durch Denken allein gefunden zu sein brauchten; denn nicht die Weise des Findens kommt hier in Betracht, sondern die Art der Beweisgründe; oder, wie Leibniz sagt*), „es handelt sich hier nicht um die Geschichte unserer Endeckungen, die verschieden ist in verschiedenen Menschen, sondern um die Verknüpfung und die natürliche Ordnung der Wahrheiten, die immer dieselbe ist.“ Die Beobachtung hätte dann zuletzt zu entscheiden, ob die in dem so begründeten Gesetze enthaltenen Bedingungen erfüllt sind. So würde man schliesslich eben dahin gelangen, wohin man durch unmittelbare An-

*) Nouveaux Essais, IV, § 9; Erdm. S. 360.

knüpfung der Schlussreihe an die beobachteten Thatsachen gekommen wäre. Aber die hier angedeutete Art des Vorgehens ist in vielen Fällen vorzuziehen, weil sie auf einen allgemeinen Satz führt, der nicht nur auf die grade vorliegenden Thatsachen anwendbar zu sein braucht. Die Wahrheiten der Arithmetik würden sich dann zu denen der Logik ähnlich verhalten wie die Lehrsätze zu den Axiomen der Geometrie. Jede würde in sich eine ganze Schlussreihe für den künftigen Gebrauch verdichtet enthalten, und ihr Nutzen würde darin bestehen, dass man die Schlüsse nicht mehr einzeln zu machen braucht, sondern gleich das Ergebniss der ganzen Reihe aussprechen kann*). Angesichts der gewaltigen Entwickelung der arithmetischen Lehren und ihrer vielfachen Anwendungen wird sich dann freilich die weit verbreitete Geringschätzung der analytischen Urtheile und das Märchen von der Unfruchtbarkeit der reinen Logik nicht halten lassen.

Wenn man diese nicht hier zuerst geäusserte Ansicht im Einzelnen so streng durchführen könnte, dass nicht der geringste Zweifel zurückbliebe, so würde das, wie mir scheint, kein ganz unwichtiges Ergebniss sein.

II. Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl.

§ 18. Indem wir uns nun den ursprünglichen Gegenständen der Arithmetik zuwenden, unterscheiden wir die einzelnen Zahlen 3, 4 u. s. f. von dem allgemeinen Begriffe

*) Es ist auffallend, dass auch Mill a. a. O. II. Buch, VI. Cap. § 4 diese Ansicht auszusprechen scheint. Sein gesunder Sinn durchbricht eben von Zeit zu Zeit sein Vorurtheil für das Empirische. Aber dieses bringt immer wieder Alles in Verwirrung, indem es ihn die physikalischen Anwendungen der Arithmetik mit dieser selbst verwechseln lässt. Er scheint nicht zu wissen, dass ein hypothetisches Urtheil auch dann wahr sein kann, wenn die Bedingung nicht wahr ist.

der Anzahl. Nun haben wir uns schon dafür entschieden, dass die einzelnen Zahlen am besten in der Weise von Leibniz, Mill, H. Grassmann und Andern aus der Eins und der Vermehrung um eins abgeleitet werden, dass aber diese Erklärungen unvollständig bleiben, solange die Eins und die Vermehrung um eins unerklärt sind. Wir haben gesehen, dass man allgemeiner Sätze bedarf, um aus diesen Definitionen die Zahlformeln abzuleiten. Solche Gesetze können eben wegen ihrer Allgemeinheit nicht aus den Definitionen der einzelnen Zahlen folgen, sondern nur aus dem allgemeinen Begriffe der Anzahl. Wir unterwerfen diesen jetzt einer genaueren Betrachtung. Dabei werden voraussichtlich auch die Eins und die Vermehrung um eins erörtert werden müssen und somit auch die Definitionen der einzelnen Zahlen eine Ergänzung zu erwarten haben.

§ 19. Hier möchte ich mich nun gleich gegen den Versuch wenden, die Zahl geometrisch als Verhältnisszahl von Längen oder Flächen zu fassen. Man glaubte offenbar die vielfachen Anwendungen der Arithmetik auf Geometrie dadurch zu erleichtern, dass man gleich die Anfänge in die engste Beziehung setzte.

Newton*) will unter Zahl nicht so sehr eine Menge von Einheiten als das abstracte Verhältniss einer jeden Grösse zu einer andern derselben Art verstehen, die als Einheit genommen wird. Man kann zugeben, dass hiermit die Zahl im weitern Sinne, wozu auch die Brüche und Irrationalzahlen gehören, zutreffend beschrieben sei; doch werden hierbei die Begriffe der Grösse und des Grössenverhältnisses vorausgesetzt. Danach scheint es, dass die Erklärung der Zahl im engern Sinne, der Anzahl, nicht überflüssig werde; denn Euklid braucht den Begriff des Gleichvielfachen um die Gleichheit von zwei Längenverhältnissen zu definirén; und das Gleichvielfache kommt

*) Baumann a. a. O. Bd. I, S. 475.

wieder auf eine Zahlengleichheit hinaus. Aber es mag sein, dass die Gleichheit von Längenverhältnissen unabhängig vom Zahlbegriffe definirbar ist. Man bliebe dann jedoch im Ungewissen darüber, in welcher Beziehung die so geometrisch definirte Zahl zu der Zahl des gemeinen Lebens stände. Dies wäre dann ganz von der Wissenschaft getrennt. Und doch kann man wohl von der Arithmetik verlangen, dass sie die Anknüpfungspunkte für jede Anwendung der Zahl bieten muss, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist. Auch das gewöhnliche Rechnen muss die Begründung seines Verfahrens in der Wissenschaft finden. Und dann erhebt sich die Frage, ob die Arithmetik selbst mit einem geometrischen Begriffe der Zahl auskomme, wenn man an die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, der Zahlen, die prim zu einer Zahl und kleiner als sie sind, und ähnliche Vorkommnisse denkt. Dagegen kann die Zahl, welche die Antwort auf die Frage wieviel? giebt, auch bestimmen, wieviel Einheiten in einer Länge enthalten sind. Die Rechnung mit negativen, gebrochenen, Irrationalzahlen kann auf die mit den natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. Newton wollte aber vielleicht unter Grössen, als deren Verhältniss die Zahl definirt wird, nicht nur geometrische, sondern auch Mengen verstehen. Dann wird jedoch die Erklärung für unsern Zweck unbrauchbar, weil von den Ausdrücken „Zahl, durch die eine Menge bestimmt wird“ und „Verhältniss einer Menge zur Mengeneinheit“ der letztere keine bessere Auskunft als der erstere giebt.

§ 20. Die erste Frage wird nun sein, ob Zahl definirbar ist. Hankel*) spricht sich dagegen aus: „Was es heisst, ein Object 1mal, 2mal, 3mal .... denken oder setzen, kann bei der principiellen Einfachheit des Begriffes der Setzung nicht definirt werden.“ Hier kommt es jedoch weniger auf das Setzen als auf das 1mal, 2mal, 3mal an. Wenn dies

*) Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 1.

definirt werden könnte, so würde die Undefinirbarkeit des Setzens uns wenig beunruhigen. Leibniz ist geneigt, die Zahl wenigstens annähernd als adaequate Idee anzusehen, d. h. als eine solche, die so deutlich ist, dass alles, was in ihr vorkommt, wieder deutlich ist.

Wenn man im Ganzen mehr dazu neigt, die Anzahl für undefinirbar zu halten, so liegt das wohl mehr an dem Misslingen darauf gerichteter Versuche als an dem Bestehen der Sache selbst entnommener Gegengründe.

Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äusseren Dinge?

§ 21. Versuchen wir wenigstens der Anzahl ihre Stelle unter unsern Begriffen anzuweisen! In der Sprache erscheinen Zahlen meistens in adjectivischer Form und in attributiver Verbindung ähnlich wie die Wörter hart, schwer, roth, welche Eigenschaften der äusseren Dinge bedeuten. Es liegt die Frage nahe, ob man die einzelnen Zahlen auch so auffassen müsse, und ob demgemäss der Begriff der Anzahl etwa mit dem der Farbe zusammengestellt werden könne.

Dies scheint die Meinung von M. Cantor*) zu sein, wenn er die Mathematik eine Erfahrungswissenschaft nennt, insofern sie von der Betrachtung von Objecten der Aussenwelt ihren Anfang nehme. Nur durch Abstraction von Gegenständen entstehe die Zahl.

E. Schröder**) lässt die Zahl der Wirklichkeit nachgebildet, aus ihr entnommen werden, indem die Einheiten durch Einer abgebildet würden. Dies nennt er Abstrahiren der Zahl. Bei dieser Abbildung würden die Einheiten nur in Hinsicht ihrer Häufigkeit dargestellt, indem von allen

---

*) Grundzüge einer Elementarmathematik, S. 2, § 4. Aehnlich Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bonn 1877, S. 1.

**) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipz. 1873, S. 6, 10 u. 11.

andern Bestimmungen der Dinge als Farbe, Gestalt abgesehen werde. Hier ist Häufigkeit nur ein anderer Ausdruck für Anzahl. Schröder stellt also Häufigkeit oder Anzahl in eine Linie mit Farbe und Gestalt und betrachtet sie als eine Eigenschaft der Dinge.

§ 22. Baumann*) verwirft den Gedanken, dass die Zahlen von den äussern Dingen abgezogene Begriffe seien: „Weil nämlich die äussern Dinge uns keine strengen Einheiten darstellen; sie stellen uns abgegränzte Gruppen oder sinnliche Punkte dar, aber wir haben die Freiheit, diese selber wieder als Vieles zu betrachten". In der That, während ich nicht im Stande bin, durch blosse Auffassungsweise die Farbe eines Dinges oder seine Härte im Geringsten zu verändern, kann ich die Ilias als Ein Gedicht, als 24 Gesänge oder als eine grosse Anzahl von Versen auffassen. Spricht man nicht in einem ganz andern Sinne von 1000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes? Die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1000. Wir können alle Blätter des Baumes unter dem Namen seines Laubes zusammenfassen. Auch dieses ist grün, aber nicht 1000. Wem kommt nun eigentlich die Eigenschaft 1000 zu? Fast scheint es weder dem einzelnen Blatte noch der Gesammtheit; vielleicht gar nicht eigentlich den Dingen der Aussenwelt? Wenn ich jemandem einen Stein gebe mit den Worten: bestimme das Gewicht hiervon, so habe ich ihm damit den ganzen Gegenstand seiner Untersuchung gegeben. Wenn ich ihm aber einen Pack Spielkarten in die Hand gebe mit den Worten: bestimme die Anzahl hiervon, so weiss er nicht, ob ich die Zahl der Karten oder der vollständigen Spiele oder etwa der Wertheinheiten beim Skatspiele erfahren will. Damit, dass ich ihm den Pack in die Hand gebe, habe ich ihm den Gegenstand seiner Untersuchung noch nicht vollständig gegeben; ich muss ein Wort:

*) A. a. O. Bd. II, S. 669.

Karte, Spiel, Wertheinheit hinzufügen. Man kann auch nicht sagen, dass die verschiedenen Zahlen hier so wie die verschiedenen Farben neben einander bestehen. Auf die einzelne farbige Fläche kann ich hindeuten, ohne ein Wort zu sagen, nicht so auf die einzelne Zahl. Wenn ich einen Gegenstand mit demselben Rechte grün und roth nennen kann, so ist das ein Zeichen, dass dieser Gegenstand nicht der eigentliche Träger des Grünen ist. Diesen habe ich erst in einer Fläche, die nur grün ist. So ist auch ein Gegenstand, dem ich mit demselben Rechte verschiedene Zahlen zuschreiben kann, nicht der eigentliche Träger einer Zahl.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Farbe und Anzahl besteht demnach darin, dass die blaue Farbe einer Fläche unabhängig von unserer Willkühr zukommt. Sie ist ein Vermögen, gewisse Lichtstrahlen zurückzuwerfen, andere mehr oder weniger zu verschlucken, und daran kann unsere Auffassung nicht das Geringste ändern. Dagegen kann ich nicht sagen, dass dem Pack Spielkarten die Anzahl 1 oder 100 oder irgend eine andere an sich zukomme, sondern höchstens in Bezug auf unsere willkührliche Auffassungsweise, und dann auch nicht so, dass wir ihm die Anzahl einfach als Praedicat beilegen könnten. Was wir ein vollständiges Spiel nennen wollen, ist offenbar eine willkührliche Festsetzung und der Pack Spielkarten weiss nichts davon. Indem wir ihn aber in dieser Hinsicht betrachten, entdecken wir vielleicht, dass wir ihn zwei vollständige Spiele nennen können. Jemand, der nicht wüsste, was man ein vollständiges Spiel nennt, würde wahrscheinlich irgend eine andere Anzahl eher an ihm herausfinden, als grade die Zwei.

§ 23. Die Frage, wem die Zahl als Eigenschaft zukomme, beantwortet Mill*) so:

„Der Name einer Zahl bezeichnet eine Eigenschaft, die dem Aggregat von Dingen angehört, welche wir mit

*) A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

dem Namen benennen; und diese Eigenschaft ist die charakteristische Weise, in welcher das Aggregat zusammengesetzt ist oder in Theile zerlegt werden kann."

Hier ist zunächst der bestimmte Artikel in dem Ausdrucke „die charakteristische Weise" ein Fehler; denn es giebt sehr verschiedene Weisen, wie man ein Aggregat zerlegen kann, und man kann nicht sagen, dass Eine allein charakteristisch wäre. Ein Bündel Stroh kann z. B. so zerlegt werden, dass man alle Halme durchschneidet, oder so, dass man es in einzelne Halme auflöst, oder so dass man zwei Bündel daraus macht. Ist denn ein Haufe von hundert Sandkörnern ebenso zusammengesetzt wie ein Bündel von 100 Strohhalmen? und doch hat man dieselbe Zahl. Das Zahlwort „Ein" in dem Ausdruck „Ein Strohhalm" drückt doch nicht aus, wie dieser Halm aus Zellen oder aus Molekeln zusammengesetzt ist. Noch mehr Schwierigkeit macht die Zahl 0. Müssen denn die Strohhalme überhaupt ein Bündel bilden, um gezählt werden zu können? Muss man die Blinden im Deutschen Reiche durchaus in einer Versammlung vereinigen, damit der Ausdruck „Zahl der Blinden im Deutschen Reiche" einen Sinn habe? Sind tausend Weizenkörner, nachdem sie ausgesäet sind, nicht mehr tausend Weizenkörner? Giebt es eigentlich Aggregate von Beweisen eines Lehrsatzes oder von Ereignissen? und doch kann man auch diese zählen. Dabei ist es gleichgiltig, ob die Ereignisse gleichzeitig oder durch Jahrtausende getrennt sind.

§ 24. Damit kommen wir auf einen andern Grund, die Zahl nicht mit Farbe und Festigkeit zusammenzustellen: die bei weitem grössere Anwendbarkeit.

Mill*) meint, die Wahrheit, dass, was aus Theilen zusammengesetzt ist, aus Theilen dieser Theile zusammengesetzt ist, sei von allen Naturerscheinungen giltig, weil

*) A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap. § 5.

alle gezählt werden könnten. Aber kann nicht noch weit mehr gezählt werden? Locke*) sagt: „Die Zahl findet Anwendung auf Menschen, Engel, Handlungen, Gedanken, jedes Ding, das existirt oder vorgestellt werden kann". Leibniz**) verwirft die Meinung der Scholastiker, dass die Zahl auf unkörperliche Dinge unanwendbar sei, und nennt die Zahl gewissermaassen eine unkörperliche Figur, entstanden aus der Vereinigung irgendwelcher Dinge, z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen, der Bewegung, welche zusammen vier sind. Daher, meint er, ist die Zahl etwas ganz Allgemeines und zur Metaphysik gehörig. An einer andern Stelle***) sagt er: „Gewogen kann nicht werden, was nicht Kraft und Vermögen hat; was keine Theile hat, hat demgemäss kein Maass; aber es giebt nichts, was nicht die Zahl zulässt. So ist die Zahl gleichsam die metaphysische Figur".

Es wäre in der That wunderbar, wenn eine, von äussern Dingen abstrahirte Eigenschaft, auf Ereignisse, auf Vorstellungen, auf Begriffe ohne Aenderung des Sinnes übertragen werden könnte. Es wäre grade so, als ob man von einem schmelzbaren Ereignisse, einer blauen Vorstellung, einem salzigen Begriffe, einem zähen Urtheile reden wollte.

Es ist ungereimt, dass an Unsinnlichem vorkomme, was seiner Natur nach sinnlich ist. Wenn wir eine blaue Fläche sehen, so haben wir einen eigenthümlichen Eindruck, der dem Worte „blau" entspricht; und diesen erkennen wir wieder, wenn wir eine andere blaue Fläche erblicken. Wollten wir annehmen, dass in derselben Weise beim Anblick eines Dreiecks etwas Sinnliches dem Worte „drei" entspräche, so müssten wir dies auch in drei Begriffen wiederfinden; etwas Unsinnliches würde etwas Sinnliches an sich haben.

---

*) Baumann a. a. O. Bd. I, S. 409.

**) Ebenda, Bd. II, S. 56.

***) Ebenda, Bd. II, S 2.

Man kann wohl zugeben, dass dem Worte „dreieckig“ eine Art sinnlicher Eindrücke entspreche, aber man muss dabei dies Wort als Ganzes nehmen. Die Drei darin sehen wir nicht unmittelbar; sondern wir sehen etwas, woran eine geistige Thätigkeit anknüpfen kann, welche zu einem Urtheile führt, in dem die Zahl 3 vorkommt. Womit nehmen wir denn etwa die Anzahl der Schlussfiguren wahr, die Aristoteles aufstellt? etwa mit den Augen? wir sehen höchstens gewisse Zeichen für diese Schlussfiguren, nicht sie selbst. Wie sollen wir ihre Anzahl sehen können, wenn sie selbst unsichtbar bleiben? Aber, meint man vielleicht, es genügt, die Zeichen zu sehen; deren Zahl ist gleich der Zahl der Schlussfiguren. Woher weiss man denn das? Dazu muss man doch schon auf andere Weise die letztere bestimmt haben. Oder ist der Satz „die Anzahl der Schlussfiguren ist vier“ nur ein anderer Ausdruck für „die Anzahl der Zeichen der Schlussfiguren ist vier“? Nein! von den Zeichen soll nichts ausgesagt werden; von den Zeichen will niemand etwas wissen, wenn nicht deren Eigenschaft zugleich eine des Bezeichneten ausdrückt. Da ohne logischen Fehler dasselbe verschiedene Zeichen haben kann, braucht nicht einmal die Zahl der Zeichen mit der des Bezeichneten übereinzustimmen.

§ 25. Während für Mill die Zahl etwas Physikalisches ist, besteht sie für Locke und Leibniz nur in der Idee. In der That sind, wie Mill*) sagt, zwei Aepfel von drei Aepfeln, zwei Pferde von einem Pferd physikalisch verschieden, ein davon verschiedenes sichtliches und fühlbares Phänomen**). Aber ist daraus zu schliessen, dass die

*) A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap. § 5.

**) Genau genommen müsste hinzugefügt werden: sobald sie überhaupt ein Phänomen sind. Wenn aber Jemand ein Pferd in Deutschland und eines in Amerika (und sonst keins) hat, so besitzt er zwei Pferde. Diese bilden jedoch kein Phänomen, sondern nur jedes Pferd für sich könnte so genannt werden.

Zweiheit, Dreiheit, etwas Physikalisches ist? Ein Paar Stiefel kann dieselbe sichtbare und fühlbare Erscheinung sein, wie zwei Stiefel. Hier haben wir einen Zahlenunterschied, dem kein physikalischer entspricht; denn zwei und Ein Paar sind keineswegs dasselbe, wie Mill sonderbarer Weise zu glauben scheint. Wie ist es endlich möglich, dass sich zwei Begriffe von drei Begriffen physikalisch unterscheiden?

So sagt Berkeley*): „Es ist zu bemerken, dass die Zahl nichts Fixes und Festgestelltes ist, was realiter in den Dingen selber existirte. Sie ist gänzlich Geschöpf des Geistes, wenn er entweder eine Idee an sich oder eine Combination von Ideen betrachtet, der er einen Namen geben will und sie so für eine Einheit gelten lässt. Jenachdem der Geist seine Ideen variirend combinirt, variirt die Einheit, und wie die Einheit so variirt auch die Zahl, welche nur eine Sammlung von Einheiten ist. Ein Fenster = 1; ein Haus, in dem viele Fenster sind, = 1; viele Häuser machen Eine Stadt aus."

Ist die Zahl etwas Subjectives?

§ 26. In diesem Gedankengange kommt man leicht dazu, die Zahl für etwas Subjectives anzusehen. Es scheint die Weise, wie die Zahl in uns entsteht, über ihr Wesen Aufschluss geben zu können. Auf eine psychologische Untersuchung also würde es dann ankommen. In diesem Sinne sagt wohl Lipschitz**):

„Wer über gewisse Dinge einen Ueberblick gewinnen will, der wird mit einem bestimmten Dinge beginnen und immer ein neues Ding den früheren hinzufügen". Dies scheint viel besser darauf zu passen, wie wir etwa die Anschauung eines Sternbildes erhalten, als auf die Zahlbildung. Die

*) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 428.

**) Lehrbuch der Analysis, S. 1. Ich nehme an, dass Lipschitz einen innern Vorgang im Sinne hat.

Absicht, einen Ueberblick zu gewinnen, ist unwesentlich; denn man wird kaum sagen können, dass eine Herde übersichtlicher wird, wenn man erfährt, aus wieviel Häuptern sie besteht.

Eine solche Beschreibung der innern Vorgänge, die der Fällung eines Zahlurtheils vorhergehen, kann nie, auch wenn sie zutreffender ist, eine eigentliche Begriffsbestimmung ersetzen. Sie wird nie zum Beweise eines arithmetischen Satzes herangezogen werden können; wir erfahren durch sie keine Eigenschaft der Zahlen. Denn die Zahl ist so wenig ein Gegenstand der Psychologie oder ein Ergebniss psychischer Vorgänge, wie es etwa die Nordsee ist. Der Objectivität der Nordsee thut es keinen Eintrag, dass es von unserer Willkühr abhangt, welchen Theil der allgemeinen Wasserbedeckung der Erde wir abgrenzen und mit dem Namen „Nordsee" belegen wollen. Das ist kein Grund, dies Meer auf psychologischem Wege erforschen zu wollen. So ist auch die Zahl etwas Objectives. Wenn man sagt „die Nordsee ist 10,000 Quadratmeilen gross," so deutet man weder durch „Nordsee" noch durch „10,000" auf einen Zustand oder Vorgang in seinem Innern hin, sondern man behauptet etwas ganz Objectives, was von unsern Vorstellungen und dgl. unabhängig ist. Wenn wir etwa ein ander Mal die Grenzen der Nordsee etwas anders ziehen oder unter „10,000" etwas Anderes verstehen wollten, so würde nicht derselbe Inhalt falsch, der vorher richtig war; sondern an die Stelle eines wahren Inhalts wäre vielleicht ein falscher geschoben, wodurch die Wahrheit jenes ersteren in keiner Weise aufgehoben würde.

Der Botaniker will etwas ebenso Thatsächliches sagen, wenn er die Anzahl der Blumenblätter einer Blume, wie wenn er ihre Farbe angiebt. Das eine hangt so wenig wie das andere von unserer Willkühr ab. Eine gewisse Aehnlichkeit der Anzahl und der Farbe ist also da; aber diese besteht nicht darin, dass beide an äusseren Dingen sinnlich wahrnehmbar, sondern darin, dass beide objectiv sind.

Ich unterscheide das Objective von dem Handgreiflichen, Räumlichen, Wirklichen. Die Erdaxe, der Massenmittelpunkt des Sonnensystems sind objectiv, aber ich möchte sie nicht wirklich nennen, wie die Erde selbst. Man nennt den Aequator oft eine gedachte Linie; aber es wäre falsch, ihn eine erdachte Linie zu nennen; er ist nicht durch Denken entstanden, das Ergebniss eines seelischen Vorgangs, sondern nur durch Denken erkannt, ergriffen. Wäre das Erkanntwerden ein Entstehen, so könnten wir nichts Positives von ihm aussagen in Bezug auf eine Zeit, die diesem vorgeblichen Entstehen vorherginge.

Der Raum gehört nach Kant der Erscheinung an. Es wäre möglich, dass er andern Vernunftwesen sich ganz anders als uns darstellte. Ja, wir können nicht einmal wissen, ob er dem einen Menschen so wie dem andern erscheint; denn wir können die Raumanschauung des einen nicht neben die des andern legen, um sie zu vergleichen. Aber dennoch ist darin etwas Objectives enthalten; Alle erkennen dieselben geometrischen Axiome, wenn auch nur durch die That, an und müssen es, um sich in der Welt zurechtzufinden. Objectiv ist darin das Gesetzmässige, Begriffliche, Beurtheilbare, was sich in Worten ausdrücken lässt. Das rein Anschauliche ist nicht mittheilbar. Nehmen wir zur Verdeutlichung zwei Vernunftwesen an, denen nur die projectivischen Eigenschaften und Beziehungen anschaulich sind: das Liegen von drei Punkten in einer Gerade, von vier Punkten in einer Ebene u. s. w.; es möge dem einen das als Ebene erscheinen, was das andere als Punkt anschaut und umgekehrt. Was dem einen die Verbindungslinie von Punkten ist, möge dem andern die Schnittkante von Ebenen sein u. s. w. immer dualistisch entsprechend. Dann könnten sie sich sehr wohl mit einander verständigen und würden die Verschiedenheit ihres Anschauens nie gewahr werden, weil in der projectivischen Geometrie jedem Lehrsatze ein anderer dualistisch gegenübersteht; denn das Abweichen in einer ästhetischen

Werthschätzung würde kein sicheres Zeichen sein. In Bezug auf alle geometrische Lehrsätze wären sie völlig im Einklange; sie würden sich nur die Wörter in ihre Anschauung verschieden übersetzen. Mit dem Worte „Punkt" verbände etwa das eine diese, das andere jene Anschauung. So kann man immerhin sagen, dass ihnen dies Wort etwas Objectives bedeute; nur darf man unter dieser Bedeutung nicht das Besondere ihrer Anschauung verstehn. Und in diesem Sinne ist auch die Erdaxe objectiv.

Man denkt gewöhnlich bei „weiss" an eine gewisse Empfindung, die natürlich ganz subjectiv ist; aber schon im gewöhnlichen Sprachgebrauche, scheint mir, tritt ein objectiver Sinn vielfach hervor. Wenn man den Schnee weiss nennt, so will man eine objective Beschaffenheit ausdrücken, die man beim gewöhnlichen Tageslicht an einer gewissen Empfindung erkennt. Wird er farbig beleuchtet, so bringt man das bei der Beurtheilung in Anschlag. Man sagt vielleicht: er erscheint jetzt roth, aber er ist weiss. Auch der Farbenblinde kann von roth und grün reden, obwohl er diese Farben in der Empfindung nicht unterscheidet. Er erkennt den Unterschied daran, dass Andere ihn machen, oder vielleicht durch einen physikalischen Versuch. So bezeichnet das Farbenwort oft nicht unsere subjective Empfindung, von der wir nicht wissen können, dass sie mit der eines Andern übereinstimmt — denn offenbar verbürgt das die gleiche Benennung keineswegs — sondern eine objective Beschaffenheit. So verstehe ich unter Objectivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hiesse urtheilen, ohne zu urtheilen, den Pelz waschen, ohne ihn nass zu machen.

§ 27. Deswegen kann ich auch Schloemilch*) nicht

*) Handbuch der algebraischen Analysis, S. 1.

zustimmen, der die Zahl Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe nennt*). Wäre die Zahl eine Vorstellung, so wäre die Arithmetik Psychologie. Das ist sie so wenig, wie etwa die Astronomie es ist. Wie sich diese nicht mit den Vorstellungen der Planeten, sondern mit den Planeten selbst beschäftigt, so ist auch der Gegenstand der Arithmetik keine Vorstellung. Wäre die Zwei eine Vorstellung, so wäre es zunächst nur die meine. Die Vorstellung eines Andern ist schon als solche eine andere. Wir hätten dann vielleicht viele Millionen Zweien. Man müsste sagen: meine Zwei, deine Zwei, eine Zwei, alle Zweien. Wenn man latente oder unbewusste Vorstellungen annimmt, so hätte man auch unbewusste Zweien, die dann später wieder bewusste würden. Mit den heranwachsenden Menschen entständen immer neue Zweien, und wer weiss, ob sie sich nicht in Jahrtausenden so veränderten, dass $2 \times 2 = 5$ würde. Trotzdem wäre

*) Man kann dagegen auch einwenden, dass dann immer dieselbe Vorstellung einer Stelle erscheinen müsste, wenn dieselbe Zahl auftritt, was offenbar falsch ist. Das Folgende würde nicht zutreffen, wenn er unter Vorstellung eine objective Idee verstehen wollte; aber welcher Unterschied wäre dann zwischen der Vorstellung der Stelle und der Stelle selbst?

Die Vorstellung im subjectiven Sinne ist das, worauf sich die psychologischen Associationsgesetze beziehen; sie ist von sinnlicher, bildhafter Beschaffenheit. Die Vorstellung im objectiven Sinne gehört der Logik an und ist wesentlich unsinnlich, obwohl das Wort, welches eine objective Vorstellung bedeutet, oft auch eine subjective mit sich führt, die jedoch nicht seine Bedeutung ist. Die subjective Vorstellung ist oft nachweisbar verschieden in verschiedenen Menschen, die objective für alle dieselbe. Die objectiven Vorstellungen kann man eintheilen in Gegenstände und Begriffe. Ich werde, um Verwirrung zu vermeiden, „Vorstellung" nur im subjectiven Sinne gebrauchen. Dadurch, dass Kant mit diesem Worte beide Bedeutungen verband, hat er seiner Lehre eine sehr subjective, idealistische Färbung gegeben und das Treffen seiner wahren Meinung erschwert. Die hier gemachte Unterscheidung ist so berechtigt wie die zwischen Psychologie und Logik. Möchte man diese immer recht streng auseinanderhalten!

es zweifelhaft, ob es, wie man gewöhnlich meint, unendlich viele Zahlen gäbe. Vielleicht wäre 10^{10} nur ein leeres Zeichen, und es gäbe gar keine Vorstellung, in irgendeinem Wesen, die so benannt werden könnte.

Wir sehen, zu welchen Wunderlichkeiten es führt, wenn man den Gedanken etwas weiter ausspinnt, dass die Zahl eine Vorstellung sei. Und wir kommen zu dem Schlusse, dass die Zahl weder räumlich und physikalisch ist, wie Mills Haufen von Kieselsteinen und Pfeffernüssen, noch auch subjectiv wie die Vorstellungen, sondern unsinnlich und objectiv. Der Grund der Objectivität kann ja nicht in dem Sinneseindrucke liegen, der als Affection unserer Seele ganz subjectiv ist, sondern, soweit ich sehe, nur in der Vernunft.

Es wäre wunderbar, wenn die allerexacteste Wissenschaft sich auf die noch zu unsicher tastende Psychologie stützen sollte.

Die Anzahl als Menge.

§ 28. Einige Schriftsteller erklären die Anzahl als eine Menge, Vielheit oder Mehrheit. Ein Uebelstand besteht hierbei darin, dass die Zahlen 0 und 1 von dem Begriffe ausgeschlossen werden. Jene Ausdrücke sind recht unbestimmt: bald nähern sie sich mehr der Bedeutung von „Haufe," „Gruppe," „Aggregat" — wobei an ein räumliches Zusammensein gedacht wird — bald werden sie fast gleichbedeutend mit „Anzahl" gebraucht, nur unbestimmter. Eine Auseinanderlegung des Begriffes der Anzahl kann darum in einer solchen Erklärung nicht gefunden werden. Thomae*) verlangt zur Bildung der Zahl, dass verschiedenen Objectenmengen verschiedene Namen gegeben werden. Damit ist offenbar eine schärfere Bestimmung jener Objectenmengen gemeint, für welche die Namengebung nur das äussere Zeichen ist. Welcher Art nun diese Bestimmung sei, das ist die

*) Elementare Theorie der analytischen Functionen, S. 1.

Frage. Es würde offenbar die Idee der Zahl nicht entstehen, wenn man für „3 Sterne," „3 Finger," „7 Sterne" Namen einführen wollte, in denen keine gemeinsamen Bestandtheile erkennbar wären. Es kommt nicht darauf an, dass überhaupt Namen gegeben werden, sondern dass für sich bezeichnet werde, was Zahl daran ist. Dazu ist nöthig, dass es in seiner Besonderheit erkannt sei.

Noch ist folgende Verschiedenheit zu beachten. Einige nennen die Zahl eine Menge von Dingen oder Gegenständen; Andere wie schon Euklid*), erklären sie als eine Menge von Einheiten. Dieser Ausdruck bedarf einer besondern Erörterung.

III. Meinungen über Einheit und Eins.

Drückt das Zahlwort „Ein" eine Eigenschaft von Gegenständen aus?

§ 29. In den Definitionen, die Euklid am Anfange des 7. Buches der Elemente giebt, scheint er mit dem Worte „*μονάς*" bald einen zu zählenden Gegenstand, bald eine Eigenschaft eines solchen, bald die Zahl Eins zu bezeichnen. Ueberall kommt man mit der Uebersetzung „Einheit" durch, aber nur, weil dies Wort selbst in diesen verschiedenen Bedeutungen schillert.

Schröder**) sagt: „Jedes der zu zählenden Dinge wird Einheit genannt." Es fragt sich, weshalb man die Dinge erst unter den Begriff der Einheit bringt und nicht einfach erklärt: Zahl ist eine Menge von Dingen, womit wir wieder auf das Vorige zurückgeworfen wären. Man könnte zunächst in der Benennung der Dinge als Einheiten eine nähere Bestimmung finden wollen, indem man der sprachlichen Form folgend „Ein" als Eigenschaftswort ansieht

*) 7. Buch der Elemente im Anfange: Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

**) A. a. O. S. 5.

und „Eine Stadt“ so auffasst wie „weiser Mann“. Dann würde eine Einheit ein Gegenstand sein, dem die Eigenschaft „Ein“ zukäme und würde sich zu „Ein“ ähnlich verhalten wie „ein Weiser“ zu dem Adjectiv „weise“. Zu den Gründen, die oben dagegen geltend gemacht sind, dass die Zahl eine Eigenschaft von Dingen sei, treten hier noch einige besondere hinzu. Auffallend wäre zunächst, dass jedes Ding diese Eigenschaft hätte. Es wäre unverständlich, weshalb man überhaupt noch einem Dinge ausdrücklich die Eigenschaft beilegt. Nur durch die Möglichkeit, dass etwas nicht weise sei, gewinnt die Behauptung, Solon sei weise, einen Sinn. Der Inhalt eines Begriffes nimmt ab, wenn sein Umfang zunimmt; wird dieser allumfassend, so muss der Inhalt ganz verloren gehen. Es ist nicht leicht zu denken, wie die Sprache dazu käme, ein Eigenschaftswort zu schaffen, das gar nicht dazu dienen könnte, einen Gegenstand näher zu bestimmen.

Wenn „Ein Mensch“ ähnlich wie „weiser Mensch“ aufzufassen wäre, so sollte man denken, dass „Ein“ auch als Praedicat gebraucht werden könnte, sodass man wie „Solon war weise“ auch sagen könnte „Solon war Ein“ oder „Solon war Einer“. Wenn nun der letzte Ausdruck auch vorkommen kann, so ist er doch für sich allein nicht verständlich. Er kann z. B. heissen: Solon war ein Weiser, wenn „Weiser“ aus dem Zusammenhange zu ergänzen ist. Aber allein scheint „Ein“ nicht Praedicat sein zu können*). Noch deutlicher zeigt sich dies beim Plural. Während man „Solon war weise“ und „Thales war weise“ zusammenziehen kann in „Solon und Thales waren weise,“ kann man nicht sagen „Solon und Thales waren Ein“. Hiervon wäre die

*) Es kommen Wendungen vor, die dem zu widersprechen scheinen; aber bei genauerer Betrachtung wird man finden, dass ein Begriffswort zu ergänzen ist, oder dass „Ein“ nicht als Zahlwort gebraucht wird, dass nicht die Einzigkeit, sondern die Einheitlichkeit behauptet werden soll.

Unmöglichkeit nicht einzusehen, wenn „Ein“ sowie „weise“ eine Eigenschaft sowohl des Solon als auch des Thales wäre.

§ 30. Damit hangt es zusammen, dass man keine Definition der Eigenschaft „Ein“ hat geben können. Wenn Leibniz*) sagt: „Eines ist, was wir durch Eine That des Verstandes zusammenfassen“, so erklärt er „Ein“ durch sich selbst. Und können wir nicht auch Vieles durch Eine That des Verstandes zusammenfassen? Dies wird von Leibniz an derselben Stelle zugestanden. Aehnlich sagt Baumann**): „Eines ist, was wir als Eines auffassen“ und weiter: „Was wir als Punkt setzen oder nicht mehr als getheilt setzen wollen, das sehen wir als Eines an; aber jedes Eins der äussern Anschauung, der reinen wie der empirischen, können wir auch als Vieles ansehen. Jede Vorstellung ist Eine, wenn abgegränzt gegen eine andere Vorstellung; aber in sich kann sie wieder in Vieles unterschieden werden.“ So verwischt sich jede sachliche Begrenzung des Begriffes und alles hangt von unserer Auffassung ab. Wir fragen wieder: welchen Sinn kann es haben, irgendeinem Gegenstande die Eigenschaft „Ein“ beizulegen, wenn je nach der Auffassung jeder Einer sein und auch nicht sein kann? Wie kann auf einem so verschwommenen Begriffe eine Wissenschaft beruhen, die grade in der grössten Bestimmtheit und Genauigkeit ihren Ruhm sucht?

§ 31. Obwohl nun Baumann***) den Begriff der Eins auf innerer Anschauung beruhen lässt, so nennt er doch in der eben angeführten Stelle als Merkmale die Ungetheiltheit und die Abgegränztheit. Wenn diese zuträfen, so wäre zu erwarten, dass auch Thiere eine gewisse Vorstellung von Einheit haben könnten. Ob wohl ein Hund beim Anblick des Mondes eine wenn auch noch so unbestimmte Vorstellung

*) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 2; Erdm. S. 8.
**) A. a. O. Bl. II. S. 669.
***) A. a. O. Bd. II. S. 669.

von dem hat, was wir mit dem Worte „Ein“ bezeichnen? Schwerlich! Und doch unterscheidet er gewiss einzelne Gegenstände: ein andrer Hund, sein Herr, ein Stein, mit dem er spielt, erscheinen ihm gewiss ebenso abgegrenzt, für sich bestehend, ungetheilt wie uns. Zwar wird er einen Unterschied merken, ob er sich gegen viele Hunde zu vertheidigen hat oder nur gegen Einen, aber dies ist der von Mill physikalisch genannte Unterschied. Es käme darauf besonders an, ob er von dem Gemeinsamen, welches wir durch das Wort „Ein“ ausdrücken, ein wenn auch noch so dunkles Bewusstsein hat z. B. in den Fällen, wo er von Einem grössern Hunde gebissen wird, und wo er Eine Katze verfolgt. Das ist mir unwahrscheinlich. Ich folgere daraus, dass die Idee der Einheit nicht, wie Locke*) meint, dem Verstande durch jenes Object draussen und jede Idee innen zugeführt, sondern von uns durch die höhern Geisteskräfte erkannt wird, die uns vom Thiere unterscheiden. Dann können solche Eigenschaften der Dinge wie Ungetheiltheit und Abgegrenztheit, die von den Thieren ebenso gut wie von uns bemerkt werden, nicht das Wesentliche an unserm Begriffe sein.

§ 32. Doch kann man einen gewissen Zusammenhang vermuthen. Darauf deutet die Sprache hin, indem sie von „Ein“ „einig“ ableitet. Etwas ist desto mehr geeignet, als besonderer Gegenstand aufgefasst zu werden, je mehr die Unterschiede in ihm gegenüber den Unterschieden von der Umgebung zurücktreten, je mehr der innere Zusammenhang den mit der Umgebung überwiegt. So bedeutet „einig“ eine Eigenschaft, die dazu veranlasst, etwas in der Auffassung von der Umgebung abzusondern und für sich zu betrachten. Wenn das französische „uni“ „eben,“ „glatt“ heisst, so ist dies so zu erklären. Auch das Wort „Einheit“ wird in ähnlicher Weise gebraucht, wenn von politischer Einheit

*) Baumann a. a. O. Bd. I. S. 409.

eines Landes, Einheit eines Kunstwerks gesprochen wird*). Aber in diesem Sinne gehört „Einheit" weniger zu ‚Ein" als zu „einig" oder „einheitlich." Denn, wenn man sagt, die Erde habe Einen Mond, so will man diesen damit nicht für einen abgegrenzten, für sich bestehenden, ungetheilten Mond erklären; sondern man sagt dies im Gegensatze zu dem, was bei der Venus, dem Mars oder dem Jupiter vorkommt. In Bezug auf Abgegrenztheit und Ungetheiltheit könnten sich die Monde des Jupiter wohl mit unserm messen und sind in dem Sinne ebenso einheitlich.

§ 33. Die Ungetheiltheit wird von einigen Schriftstellern bis zur Untheilbarkeit gesteigert. G. Köpp**) nennt jedes unzerlegbar und für sich bestehend gedachte sinnlich oder nicht sinnlich wahrnehmbare Ding ein Einzelnes und die zu zählenden Einzelnen Einse, wo offenbar „Eins" in dem Sinne von „Einheit" gebraucht wird. Indem Baumann seine Meinung, die äussern Dinge stellten keine strengen Einheiten dar, damit begründet, dass wir die Freiheit hätten, sie als Vieles zu betrachten, giebt auch er die Unzerlegbarkeit für ein Merkmal der strengen Einheit aus. Dadurch dass man den innern Zusammenhang bis zum Unbedingten steigert, will man offenbar ein Merkmal der Einheit gewinnen, das von der willkührlichen Auffassung unabhängig ist. Dieser Versuch scheitert daran, dass dann fast nichts übrig bliebe, was Einheit genannt und gezählt werden dürfte. Deshalb wird auch sofort der Rückzug damit angetreten, dass man nicht die Unzerlegbarkeit selbst, sondern das als unzerlegbar Gedachtwerden als Merkmal aufstellt. Damit ist man denn bei der schwankenden Auffassung wieder angekommen. Und wird denn dadurch etwas gewonnen, dass man sich die Sachen anders denkt als sie sind? Im Gegentheil! aus einer falschen

*) Ueber die Geschichte des Wortes „Einheit" vergl. Eucken, Geschichte der philosophischen Terminologie. S. 122—3, S. 136, S. 220.

**) Schularithmetik. Eisenach 1867. S. 5 u. 6.

Annahme können falsche Folgerungen fliessen. Wenn man aber aus der Unzerlegbarkeit nichts schliessen will, was nützt sie dann? wenn man von der Strenge des Begriffes ohne Schaden etwas ablassen kann, ja es sogar muss, wozu dann diese Strenge? Aber vielleicht soll man an die Zerlegbarkeit nur nicht denken. Als ob durch Mangel an Denken etwas erreicht werden könnte! Es giebt aber Fälle, wo man gar nicht vermeiden kann, an die Zerlegbarkeit zu denken, wo sogar ein Schluss auf der Zusammensetzung der Einheit beruht, z. B. bei der Aufgabe: Ein Tag hat 24 Stunden, wieviel Stunden haben 3 Tage?

Sind die Einheiten einander gleich?

§ 34. So misslingt denn jeder Versuch, die Eigenschaft ‚Ein" zu erklären, und wir müssen wohl darauf verzichten, in der Bezeichnung der Dinge als Einheiten eine nähere Bestimmung zu sehen. Wir kommen wieder auf unsere Frage zurück: weshalb nennt man die Dinge Einheiten, wenn „Einheit" nur ein andrer Name für Ding ist, wenn alle Dinge Einheiten sind oder als solche aufgefasst werden können? E. Schröder*) giebt als Grund die den Objecten der Zählung zugeschriebene Gleichheit an. Zunächst ist nicht zu sehen, warum die Wörter „Ding" und „Gegenstand" dies nicht ebenso gut andeuten könnten. Dann fragt es sich: weshalb wird den Gegenständen der Zählung Gleichheit zugeschrieben? Wird sie ihnen nur zugeschrieben, oder sind sie wirklich gleich? Jedenfalls sind nie zwei Gegenstände durchaus gleich. Andrerseits kann man wohl fast immer eine Hinsicht ausfindig machen, in der zwei Gegenstände übereinstimmen. So sind wir wieder bei der willkührlichen Auffassung angelangt, wenn wir nicht gegen die Wahrheit den Dingen eine weitergehende Gleichheit zuschreiben wollen, als ihnen zukommt. In der That nennen viele Schriftsteller

*) A. a. O. S. 5.

die Einheiten ohne Einschränkung gleich. Hobbes*) sagt: „Die Zahl, absolut gesagt, setzt in der Mathematik unter sich gleiche Einheiten voraus, aus denen sie hergestellt wird.“ Hume**) hält die zusammensetzenden Theile der Quantität und Zahl für ganz gleichartig. Thomae***) nennt ein Individuum der Menge Einheit und sagt: „Die Einheiten sind einander gleich.“ Ebenso gut oder vielmehr richtiger könnte man sagen: die Individuen der Menge sind von einander verschieden. Was hat nun diese vorgebliche Gleichheit für die Zahl zu bedeuten? Die Eigenschaften, durch die sich die Dinge unterscheiden, sind für ihre Anzahl etwas Gleichgiltiges und Fremdes. Darum will man sie fern halten. Aber das gelingt in dieser Weise nicht. Wenn man, wie Thomae verlangt, „von den Eigenthümlichkeiten der Individuen einer Objectenmenge abstrahirt“ oder „bei der Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge unterscheiden,“ so bleibt nicht, wie Lipschitz meint, „der Begriff der Anzahl der betrachteten Dinge“ zurück, sondern man erhält einen allgemeinen Begriff, unter den jene Dinge fallen. Diese selbst verlieren dadurch nichts von ihren Besonderheiten. Wenn ich z. B. bei der Betrachtung einer weissen und einer schwarzen Katze von den Eigenschaften absehe, durch die sie sich unterscheiden, so erhalte ich etwa den Begriff „Katze“. Wenn ich nun auch beide unter diesen Begriff bringe und sie etwa Einheiten nenne, so bleibt die weisse doch immer weiss und die schwarze schwarz. Auch dadurch, dass ich an die Farben nicht denke oder mir vornehme, keine Schlüsse aus deren Verschiedenheit zu ziehen, werden die Katzen nicht farblos und bleiben ebenso verschieden, wie sie waren. Der Begriff „Katze,“ der durch

*) Baumann a. a. O. Bd. I. S. 242.

**) Ebenda Bd. II. S. 568.

***) A. a. O. S. 1.

die Abstraction gewonnen ist, enthält zwar die Besonderheiten nicht mehr, ist aber eben dadurch nur Einer.

§ 35. Durch blos begriffliche Verfahrungsweisen gelingt es nicht, verschiedene Dinge gleich zu machen; gelänge es aber, so hätte man nicht mehr Dinge, sondern nur Ein Ding; denn, wie Descartes*) sagt, die Zahl — besser: die Mehrzahl — in den Dingen entspringt aus deren Unterscheidung. E. Schröder**) behauptet mit Recht: „Die Anforderung Dinge zu zählen kann vernünftiger Weise nur gestellt werden, wo solche Gegenstände vorliegen, welche deutlich von einander unterscheidbar z. B. räumlich und zeitlich getrennt und gegen einander abgegrenzt erscheinen.“ In der That erschwert zuweilen die zu grosse Aehnlichkeit z. B. der Stäbe eines Gitters die Zählung. Mit besonderer Schärfe drückt sich W. Stanley Jevons***) in diesem Sinne aus: „Zahl ist nur ein andrer Name für Verschiedenheit. Genaue Identität ist Einheit, und mit Verschiedenheit entsteht Mehrheit.“ Und weiter (S. 157): „Es ist oft gesagt, dass Einheiten Einheiten sind, insofern sie einander vollkommen gleichen; aber, obwohl sie in einigen Rücksichten vollkommen gleich sein mögen, müssen sie mindestens in Einem Punkte verschieden sein; sonst wäre der Begriff der Mehrheit auf sie unanwendbar. Wenn drei Münzen so gleich wären, dass sie denselben Raum zu derselben Zeit einnähmen, so wären sie nicht drei Münzen, sondern Eine Münze.“

§ 36. Aber es zeigt sich bald, dass die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten auf neue Schwierigkeiten stösst. Jevons erklärt: „Eine Einheit (unit) ist irgendein Gegenstand des Denkens, der von irgendeinem andern Gegenstande unterschieden werden kann, der als Einheit in derselben Aufgabe behandelt wird.“ Hier ist Einheit durch

*) Baumann a. a. O. Bd. I. S. 103.

**) A. a. O. S. 3.

***) The principles of Science, 3 d. Ed. S. 156.

sich selbst erklärt und der Zusatz „der von irgendeinem andern Gegenstande unterschieden werden kann“ enthält keine nähere Bestimmung, weil er selbstverständlich ist. Wir nennen den Gegenstand eben nur darum einen andern, weil wir ihn vom ersten unterscheiden können. Jevons*) sagt ferner: „Wenn ich das Symbol 5 schreibe, meine ich eigentlich

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

und es ist vollkommen klar, dass jede dieser Einheiten von jeder andern verschieden ist. Wenn erforderlich, kann ich sie so bezeichnen:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''' .“$$

Gewiss ist es erforderlich, sie verschieden zu bezeichnen, wenn sie verschieden sind; sonst würde ja die grösste Verwirrung entstehen. Wenn schon die verschiedene Stelle, an der die Eins erschiene, eine Verschiedenheit bedeuten sollte, so müsste das als ausnahmslose Regel hingestellt werden, weil man sonst nie wüsste, ob 1 + 1 2 bedeuten solle oder 1. Dann müsste man die Gleichung $1 = 1$ verwerfen und wäre in der Verlegenheit, nie dasselbe Ding zum zweiten Male bezeichnen zu können. Das geht offenbar nicht an. Wenn man aber verschiedenen Dingen verschiedene Zeichen geben will, so ist nicht einzusehen, weshalb man in diesen noch einen gemeinsamen Bestandtheil festhält und nicht lieber statt $1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$ schreibt

$$a + b + c + d + e.$$

Die Gleichheit ist doch nun einmal verloren gegangen, und die Andeutung einer gewissen Aehnlichkeit nützt nichts. So zerrinnt uns die Eins unter den Händen; wir behalten die Gegenstände mit allen ihren Besonderheiten. Diese Zeichen

$$1', \quad 1'', \quad 1'''$$

sind ein sprechender Ausdruck für die Verlegenheit: wir

*) A. a. O. S. 162.

haben die Gleichheit nöthig; deshalb die 1; wir haben die Verschiedenheit nöthig; deshalb die Indices, die nur leider die Gleichheit wieder aufheben.

§ 37. Bei andern Schriftstellern stossen wir auf dieselbe Schwierigkeit. Locke*) sagt: „Durch Wiederholung der Idee einer Einheit und Hinzufügung derselben zu einer andern Einheit machen wir demnach eine collective Idee, die durch das Wort „zwei" bezeichnet wird. Und wer das thun und so weitergehen kann, immer noch Eins hinzufügend zu der letzten collectiven Idee, die er von einer Zahl hatte, und ihr einen Namen geben kann, der kann zählen." Leibniz**) definirt Zahl als 1 und 1 und 1 oder als Einheiten. Hesse***) sagt: „Wenn man sich eine Vorstellung machen kann von der Einheit, die in der Algebra mit dem Zeichen 1 ausgedrückt wird, ... so kann man sich auch eine zweite gleichberechtigte Einheit denken und weitere derselben Art. Die Vereinigung der zweiten mit der ersten zu einem Ganzen giebt die Zahl 2".

Hier ist auf die Beziehung zu achten, in der die Bedeutungen der Wörter „Einheit" und „Eins" zu einander stehen. Leibniz versteht unter Einheit einen Begriff, unter den die Eins und die Eins und die Eins fallen, wie er denn auch sagt: „Das Abstracte von Eins ist die Einheit." Locke und Hesse scheinen Einheit und Eins gleichbedeutend zu gebrauchen. Im Grunde thut dies wohl auch Leibniz; denn indem er die einzelnen Gegenstände, die unter den Begriff der Einheit fallen, sämmtlich Eins nennt, bezeichnet er mit diesem Worte nicht den einzelnen Gegenstand, sondern den Begriff, unter den sie fallen.

§ 38. Um nicht Verwirrung einreissen zu lassen, wird es jedoch gut sein, einen Unterschied zwischen Einheit

*) Baumann a. a. O. Bd. I. S. 409–411.
**) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 3.
***) Vier Species. S. 2.

und Eins streng aufrecht zu erhalten. Man sagt „die Zahl Eins“ und deutet mit dem bestimmten Artikel einen bestimmten, einzelnen Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung an. Es giebt nicht verschiedene Zahlen Eins, sondern nur Eine. Wir haben in 1 einen Eigennamen, der als solcher eines Plurals ebenso unfähig ist wie „Friedrich der Grosse“ oder „das chemische Element Gold.“ Es ist nicht Zufall und nicht eine ungenaue Bezeichnungsweise, dass man 1 ohne unterscheidende Striche schreibt. Die Gleichung

$$3 - 2 = 1$$

würde St. Jevons etwa so wiedergeben:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$$

Was würde aber das Ergebniss von

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1'''''')$$

sein? Jedenfalls nicht $1'$. Daraus geht hervor, dass es nach seiner Auffassung nicht nur verschiedene Einsen, sondern auch verschiedene Zweien u. s. w. geben würde; denn $1'' + 1'''$ könnte nicht durch $1'''' + 1''''''$ vertreten werden. Man sieht hieraus recht deutlich, dass die Zahl nicht eine Anhäufung von Dingen ist. Die Arithmetik würde aufgehoben werden, wollte man statt der Eins, die immer dieselbe ist, verschiedene Dinge einführen, wenn auch in noch so ähnlichen Zeichen; gleich dürften sie ja ohne Fehler nicht sein. Man kann doch nicht annehmen, dass das tiefste Bedürfniss der Arithmetik eine fehlerhafte Schreibung sei. Darum ist es unmöglich 1 als Zeichen für verschiedene Gegenstände anzusehen, wie Island, Aldebaran, Solon u. dgl. Am greifbarsten wird der Unsinn, wenn man an den Fall denkt, dass eine Gleichung drei Wurzeln hat, nämlich 2 und 5 und 4. Schreibt man nun nach Jevons für 3.

$$1' + 1'' + 1''',$$

so würde $1'$ hier 2, $1''$ 5 und $1'''$ 4 bedeuten, wenn man unter $1'$, $1''$, $1'''$ Einheiten und folglich nach Jevons die hier vorliegenden Gegenstände des Denkens versteht. Wäre es dann nicht verständlicher für $1' + 1'' + 1'''$ zu schreiben

$$2 + 5 + 4 ?$$

Ein Plural ist nur von Begriffswörtern möglich. Wenn man also von „Einheiten" spricht, so kann man dies Wort nicht gleichbedeutend mit dem Eigennamen „Eins" gebrauchen, sondern als Begriffswort. Wenn „Einheit" „zu zählender Gegenstand" bedeutet, so kann man nicht Zahl als Einheiten definiren. Wenn man unter „Einheit" einen Begriff versteht, der die Eins und nur diese unter sich fasst, so hat ein Plural keinen Sinn, und es ist wieder unmöglich, mit Leibniz Zahl als Einheiten oder als 1 und 1 und 1 zu definiren. Wenn man das „und" so gebraucht wie in „Bunsen und Kirchhof," so ist 1 und 1 und 1 nicht 3, sondern 1, sowie Gold und Gold und Gold nie etwas anderes als Gold ist. Das Pluszeichen in

$$1 + 1 + 1 = 3$$

muss also anders als das „und" aufgefasst werden, das eine Sammlung, eine „collective Idee" bezeichnen hilft.

§ 39. Wir stehen demnach vor folgender Schwierigkeit: Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir eine Anhäufung, in der die Gegenstände mit eben den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich unterscheiden, und das ist nicht die Zahl. Wenn wir die Zahl andrerseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fliesst dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zu einer Mehrheit.

Wenn wir mit 1 jeden der zu zählenden Gegenstände bezeichnen, so ist das ein Fehler, weil Verschiedenes dasselbe Zeichen erhält. Versehen wir die 1 mit unterscheidenden Strichen, so wird sie für die Arithmetik unbrauchbar.

Das Wort „Einheit" ist vortrefflich geeignet, diese Schwierigkeit zu verhüllen; und das ist der — wenn auch unbewusste — Grund, warum man es den Wörtern „Gegenstand" und „Ding" vorzieht. Man nennt zunächst die zu zählenden Dinge Einheiten, wobei die Verschiedenheit ihr

Recht erhält; dann geht die Zusammenfassung, Sammlung, Vereinigung, Hinzufügung, oder wie man es sonst nennen will, in den Begriff der arithmetischen Addition über und das Begriffswort „Einheit“ verwandelt sich unvermerkt in den Eigennamen „Eins“. Damit hat man dann die Gleichheit. Wenn ich an den Buchstaben **u** ein **n** und daran ein **d** füge, so sieht jeder leicht ein, dass das nicht die Zahl 3 ist. Wenn ich aber **u**, **n** und **d** unter den Begriff „Einheit“ bringe und nun für „**u** und **n** und **d**“ sage „eine Einheit und eine Einheit und noch eine Einheit“ oder „1 und 1 und 1“, so glaubt man leicht damit die 3 zu haben. Die Schwierigkeit wird durch das Wort „Einheit“ so gut versteckt, dass gewiss nur wenige Menschen eine Ahnung von ihr haben.

Hier könnte Mill mit Recht tadelnd von einem kunstfertigen Handhaben der Sprache reden; denn hier ist es nicht die äussere Erscheinung eines Denkvorganges, sondern es spiegelt einen solchen nur vor. Hier hat man in der That den Eindruck, als ob den von Gedanken leeren Worten eine gewisse geheimnissvolle Kraft beigelegt werde, wenn Verschiedenes blos dadurch, dass man es Einheit nennt, gleich werden soll.

Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden.

§ 40. Wir betrachten nun einige Ausführungen, die sich als Versuche zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit darstellen, wenn sie auch wohl nicht immer mit klarem Bewusstsein in dieser Absicht gemacht sind.

Man kann zunächst eine Eigenschaft des Raumes und der Zeit zu Hilfe rufen. Ein Raumpunkt ist nämlich von einem andern, eine Gerade oder Ebene von einer andern, congruente Körper, Flächen- oder Linienstücke von einander, für sich allein betrachtet, gar nicht zu unterscheiden, sondern nur in ihrem Zusammensein als Bestandtheile einer Gesammt-

anschauung. So scheint sich hier Gleichheit mit Unterscheidbarkeit zu vereinen. Aehnliches gilt von der Zeit. Daher meint wohl Hobbes,*) dass die Gleichheit der Einheiten anders als durch Theilung des Continuums entstehe, könne kaum gedacht werden. Thomae**) sagt: „Stellt man eine Menge von Individuen oder Einheiten im Raume vor und zählt man sie successive, wozu Zeit erforderlich ist, so bleibt bei aller Abstraction als unterscheidendes Merkmal der Einheiten noch ihre verschiedene Stellung im Raume und ihre verschiedene Aufeinanderfolge in der Zeit übrig."

Zunächst erhebt sich das Bedenken gegen eine solche Auffassungsweise, dass dann das Zählbare auf das Räumliche und Zeitliche beschränkt wäre. Schon Leibniz***) weist die Meinung der Scholastiker zurück, die Zahl entstehe aus der blossen Theilung des Continuums und könne nicht auf unkörperliche Dinge angewandt werden. Baumann †) betont die Unabhängigkeit von Zahl und Zeit. Der Begriff der Einheit sei auch ohne die Zeit denkbar. St. Jevons††) sagt: „Drei Münzen sind drei Münzen, ob wir sie nun nach einander zählen oder sie alle zugleich betrachten. In vielen Fällen ist weder Zeit noch Raum der Grund des Unterschiedes, sondern allein Qualität. Wir können Gewicht, Trägheit und Härte des Goldes als drei Eigenschaften auffassen, obgleich keine von diesen vor noch nach der andern ist weder im Raum noch in der Zeit. Jedes Mittel der Unterscheidung kann eine Quelle der Vielheit sein." Ich füge hinzu: wenn die gezählten Gegenstände nicht wirklich auf einander folgen, sondern nur nach einander gezählt werden, so kann die Zeit nicht der Grund der Unterscheidung sein. Denn, um sie nach einander zählen zu können, müssen wir schon

*) Baumann a. a. O. Bd. I. S. 242.
**) Elementare Theorie der analyt. Functionen, S. 1.
***) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 2.
†) A. a. O. Bd. II. S. 668.
††) The Principles of Science, S. 157.

unterscheidende Kennzeichen haben. Die Zeit ist nur ein psychologisches Erforderniss zum Zählen, hat aber mit dem Begriffe der Zahl nichts zu thun. Wenn man unräumliche und unzeitliche Gegenstände durch Raum – oder Zeitpunkte vertreten lässt, so kann dies vielleicht für die Ausführung der Zählung vortheilhaft sein; grundsätzlich wird aber dabei die Anwendbarkeit des Zahlbegriffes auf Unräumliches und Unzeitliches vorausgesetzt.

§ 41. Wird denn aber der Zweck der Vereinigung von Unterscheidbarkeit und Gleichheit wirklich erreicht, wenn wir von allen unterscheidenden Kennzeichen ausser den räumlichen und zeitlichen absehen? Nein! Wir sind der Lösung nicht um Einen Schritt näher gekommen. Die grössere oder geringere Aehnlichkeit der Gegenstände thut nichts zur Sache, wenn sie doch zuletzt aus einander gehalten werden müssen. Ich darf die einzelnen Punkte, Linien u. s. f. hier ebenso wenig alle mit 1 bezeichnen, als ich sie bei geometrischen Betrachtungen sämmtlich A nennen darf; denn hier wie dort ist es nöthig, sie zu unterscheiden. Nur für sich, ohne Rücksicht auf ihre räumlichen Beziehungen sind die Raumpunkte einander gleich. Soll ich sie aber zusammenfassen, so muss ich sie in ihrem räumlichen Zusammensein betrachten, sonst schmelzen sie unrettbar in Einem zusammen. Punkte stellen in ihrer Gesammtheit vielleicht irgendeine sternbildartige Figur vor oder sind irgendwie auf einer Geraden angeordnet, gleiche Strecken bilden vielleicht mit den Endpunkten zusammenstossend eine einzige Strecke oder liegen getrennt von einander. Die so entstehenden Gebilde können für dieselbe Zahl ganz verschieden sein. So würden wir auch hier verschiedene Fünfen, Sechsen u. s. w. haben. Die Zeitpunkte sind durch kurze oder lange, gleiche oder ungleiche Zwischenzeiten getrennt. Alles dies sind Verhältnisse, die mit der Zahl an sich gar nichts zu thun haben. Ueberall mischt sich etwas Besonderes ein, worüber die Zahl in ihrer Allgemeinheit weit erhaben ist. Sogar ein

einzelner Moment hat etwas Eigenthümliches, wodurch er sich etwa von einem Raumpunkte unterscheidet, und wovon nichts in dem Zahlbegriffe vorkommt.

§ 42. Auch der Ausweg, räumliche und zeitliche Anordnung durch einen allgemeinern Reihenbegriff zu ersetzen, führt nicht zum Ziele; denn die Stelle in der Reihe kann nicht der Grund des Unterscheidens der Gegenstände sein, weil diese schon irgendworan unterschieden sein müssen, um in eine Reihe geordnet werden zu können. Eine solche Anordnung setzt immer Beziehungen zwischen den Gegenständen voraus, seien es nun räumliche oder zeitliche oder logische oder Tonintervalle oder welche sonst, durch die man sich von einem zum andern leiten lässt, und die mit deren Unterscheidung nothwendig verbunden sind.

Wenn Hankel*) ein Object 1 mal, 2 mal, 3 mal denken oder setzen lässt, so scheint auch dies ein Versuch zu sein, die Unterscheidbarkeit mit der Gleichheit des zu Zählenden zu vereinen. Aber man sieht auch sofort, dass es kein gelungener ist; denn diese Vorstellungen oder Anschauungen desselben Gegenstandes müssen, um nicht in Eine zusammenzufliessen, irgendwie verschieden sein. Ich meine auch, dass man berechtigt ist, von 45 Millionen Deutschen zu sprechen, ohne vorher 45 Millionen mal einen Normal-Deutschen gedacht oder gesetzt zu haben; das möchte etwas umständlich sein.

§ 43. Wahrscheinlich um die Schwierigkeiten zu vermeiden, die sich ergeben, wenn man mit St. Jevons jedes Zeichen 1 einen der gezählten Gegenstände bedeuten lässt, will E. Schröder dadurch einen Gegenstand nur abbilden. Die Folge ist, dass er nur das Zahlzeichen, nicht die Zahl erklärt. Er sagt nämlich**): „Um nun ein Zeichen zu erhalten, welches fähig ist auszudrücken, wieviele jener

*) Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 1.

**) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S. 5 ff.

Einheiten*) vorhanden sind, richtet man die Aufmerksamkeit der Reihe nach einmal auf eine jede derselben und bildet sie mit einem Strich: 1 (eine Eins, ein Einer) ab; diese Einer setzt man in eine Zeile neben einander, verbindet sie jedoch unter sich durch das Zeichen + (plus), da sonst zum Beispiel 111 nach der gewöhnlichen Zahlenbezeichnung als einhundert und elf gelesen würde. Man erhält auf diese Weise ein Zeichen wie:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

dessen Zusammensetzung man dadurch beschreiben kann, dass man sagt:

„Eine natürliche Zahl ist eine Summe von Einern."

Hieraus sieht man, dass für Schröder die Zahl ein Zeichen ist. Was durch dies Zeichen ausgedrückt wird, das, was ich bisher Zahl genannt habe, setzt er mit den Worten „wieviele jener Einheiten vorhanden sind" als bekannt voraus. Auch unter dem Worte „Eins" versteht er das Zeichen 1, nicht dessen Bedeutung. Das Zeichen + dient ihm zunächst nur als äusserliches Verbindungsmittel ohne eignen Inhalt; erst später wird die Addition erklärt. Er hätte wohl kürzer so sagen können: man schreibt ebensoviele Zeichen 1 neben einander, als man zu zählende Gegenstände hat, und verbindet sie durch das Zeichen + . Die Null würde dadurch auszudrücken sein, dass man nichts hinschreibt.

§ 44. Um nicht die unterscheidenden Kennzeichen der Dinge in die Zahl mitaufzunehmen, sagt St. Jevons**):

„Es wird jetzt wenig schwierig sein, eine klare Vorstellung von der Zahlen-Abstraction zu bilden. Sie besteht im Abstrahiren von dem Charakter der Verschiedenheit, aus der Vielheit entspringt, indem man lediglich ihr Vorhandensein beibehält. Wenn ich von drei Männern spreche,

*) zu zählenden Gegenstände.

**) A. a. O. S. 158.

so brauche ich nicht gleich die Kennzeichen einzeln anzugeben, an denen man jeden von ihnen von jedem unterscheiden kann. Diese Kennzeichen müssen vorhanden sein, wenn sie wirklich drei Männer und nicht ein und derselbe sind, und indem ich von ihnen als von vielen rede, behaupte ich damit zugleich das Vorhandensein der erforderlichen Unterschiede. Unbenannte Zahl ist also die leere Form der Verschiedenheit."

Wie ist das zu verstehn? Man kann entweder von den unterscheidenden Eigenschaften der Dinge abstrahiren, bevor man sie zu einem Ganzen vereinigt; oder man kann erst ein Ganzes bilden und dann von der Art der Unterschiede abstrahiren. Auf dem ersten Wege würden wir gar nicht zur Unterscheidung der Dinge kommen und also auch das Vorhandensein der Unterschiede nicht festhalten können; den zweiten Weg scheint Jevons zu meinen. Aber ich glaube nicht, dass wir so die Zahl 10000 gewinnen würden, weil wir nicht im Stande sind, so viele Unterschiede gleichzeitig aufzufassen und ihr Vorhandensein festzuhalten; denn, wenn es nach einander geschähe, so würde die Zahl nie fertig werden. Wir zählen zwar in der Zeit; aber dadurch gewinnen wir nicht die Zahl, sondern bestimmen sie nur. Uebrigens ist die Angabe der Weise des Abstrahirens keine Definition.

Was soll man sich unter der „leeren Form der Verschiedenheit" denken? etwa einen Satz wie

„a ist verschieden von b",

wobei a und b unbestimmt bleiben? Wäre dieser Satz etwa die Zahl 2? Ist der Satz

„die Erde hat zwei Pole"

gleichbedeutend mit

„der Nordpol ist vom Südpol verschieden"?

Offenbar nicht. Der zweite Satz könnte ohne den ersten und dieser ohne jenen bestehen. Für die Zahl 1000 würden wir dann

$$\frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2}$$

solche Sätze haben, die eine Verschiedenheit ausdrücken.

Was Jevons sagt, passt insbesondere gar nicht auf die 0 und die 1. Wovon soll man eigentlich abstrahiren, um z. B. vom Monde auf die Zahl 1 zu kommen? Durch Abstrahiren erhält man wohl die Begriffe: Begleiter der Erde, Begleiter eines Planeten, Himmelskörper ohne eignes Licht, Himmelskörper, Körper, Gegenstand; aber die 1 ist in dieser Reihe nicht anzutreffen; denn sie ist kein Begriff, unter den der Mond fallen könnte. Bei der 0 hat man gar nicht einmal einen Gegenstand, von dem bei der Abstraction auszugehen wäre. Man wende nicht ein, dass 0 und 1 nicht Zahlen in demselben Sinne seien wie 2 und 3! Die Zahl antwortet auf die Frage wieviel? und wenn man z. B. fragt: wieviel Monde hat dieser Planet? so kann man sich ebenso gut auf die Antwort 0 oder 1 wie 2 oder 3 gefasst machen, ohne dass der Sinn der Frage ein andrer wird. Zwar hat die Zahl 0 etwas Besonderes und ebenso die 1, aber das gilt im Grunde von jeder ganzen Zahl; nur fällt es bei den grösseren immer weniger in die Augen. Es ist durchaus willkührlich, hier einen Artunterschied zu machen. Was nicht auf 0 oder 1 passt, kann für den Begriff der Zahl nicht wesentlich sein.

Endlich wird durch die Annahme dieser Entstehungsweise der Zahl die Schwierigkeit gar nicht gehoben, auf die wir bei der Betrachtung der Bezeichnung

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

für 5 gestossen sind. Diese Schreibung steht gut im Einklange mit dem, was Jevons über die zahlenbildende Abstraction sagt; die obern Striche deuten nämlich an, dass eine Verschiedenheit da ist, ohne jedoch ihre Art anzugeben. Aber das blosse Bestehen der Verschiedenheit genügt schon, wie wir gesehen haben, um bei der Jevons'schen Auffassung verschiedene Einsen, Zweien, Dreien hervorzubringen,

was mit dem Bestande der Arithmetik durchaus unverträglich ist

Lösung der Schwierigkeit.

§ 45. Ueberblicken wir nun das bisher von uns Festgestellte und die noch unbeantwortet gebliebenen Fragen!

Die Zahl ist nicht in der Weise wie Farbe, Gewicht, Härte von den Dingen abstrahirt, ist nicht in dem Sinne wie diese Eigenschaft der Dinge. Es blieb noch die Frage, von wem durch eine Zahlangabe etwas ausgesagt werde.

Die Zahl ist nichts Physikalisches, aber auch nichts Subjectives, keine Vorstellung.

Die Zahl entsteht nicht durch Hinzufügung von Ding zu Ding. Auch die Namengebung nach jeder Hinzufügung ändert darin nichts.

Die Ausdrücke „Vielheit," „Menge," „Mehrheit" sind wegen ihrer Unbestimmtheit ungeeignet, zur Erklärung der Zahl zu dienen.

In Bezug auf Eins und Einheit blieb die Frage, wie die Willkühr der Auffassung zu beschränken sei, die jeden Unterschied zwischen Einem und Vielen zu verwischen schien.

Die Abgegrenztheit, die Ungetheiltheit, die Unzerlegbarkeit sind keine brauchbaren Merkmale für das, was wir durch das Wort „Ein" ausdrücken.

Wenn man die zu zählenden Dinge Einheiten nennt, so ist die unbedingte Behauptung, dass die Einheiten gleich seien, falsch. Dass sie in gewisser Hinsicht gleich sind, ist zwar richtig aber werthlos. Die Verschiedenheit der zu zählenden Dinge ist sogar nothwendig, wenn die Zahl grösser als 1 werden soll.

So schien es, dass wir den Einheiten zwei widersprechende Eigenschaften beilegen müssten: die Gleichheit und die Unterscheidbarkeit.

Es ist ein Unterschied zwischen Eins und Einheit zu machen. Das Wort „Eins" ist als Eigenname eines Gegen-

standes der mathematischen Forschung eines Plurals unfähig. Es ist also sinnlos, Zahlen durch Zusammenfassen von Einsen entstehen zu lassen. Das Pluszeichen in $1 + 1 = 2$ kann nicht eine solche Zusammenfassung bedeuten.

§ 46. Um Licht in die Sache zu bringen, wird es gut sein, die Zahl im Zusammenhange eines Urtheils zu betrachten, wo ihre ursprüngliche Anwendungsweise hervortritt. Wenn ich in Ansehung derselben äussern Erscheinung mit derselben Wahrheit sagen kann: „dies ist eine Baumgruppe“ und „dies sind fünf Bäume“ oder „hier sind vier Compagnien“ und „hier sind 500 Mann,“ so ändert sich dabei weder das Einzelne noch das Ganze, das Aggregat, sondern meine Benennung. Das ist aber nur das Zeichen der Ersetzung eines Begriffes durch einen andern. Damit wird uns als Antwort auf die erste Frage des vorigen Paragraphen nahe gelegt, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte. Am deutlichsten ist dies vielleicht bei der Zahl 0. Wenn ich sage: „die Venus hat 0 Monde“, so ist gar kein Mond oder Aggregat von Monden da, von dem etwas ausgesagt werden könnte; aber dem Begriffe „Venusmond“ wird dadurch eine Eigenschaft beigelegt, nämlich die, nichts unter sich zu befassen. Wenn ich sage: „der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen,“ so lege ich die Zahl vier dem Begriffe „Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht,“ bei.

Man mag einwenden, dass ein Begriff wie z. B. „Angehöriger des deutschen Reiches,“ obwohl seine Merkmale unverändert bleiben, eine von Jahr zu Jahr wechselnde Eigenschaft haben würde, wenn die Zahlangabe eine solche von ihm aussagte. Man kann dagegen geltend machen, dass auch Gegenstände ihre Eigenschaften ändern, was nicht verhindere, sie als dieselben anzuerkennen. Hier lässt sich aber der Grund noch genauer angeben. Der Begriff „Angehöriger des deutschen Reiches“ enthält nämlich die Zeit als veränderlichen Bestandtheil, oder, um mich mathematisch

auszudrücken, ist eine Function der Zeit. Für „a ist ein Angehöriger des deutschen Reiches“ kann man sagen: „a gehört dem deutschen Reiche an“ und dies bezieht sich auf den gerade gegenwärtigen Zeitpunkt. So ist also in dem Begriffe selbst schon etwas Fliessendes. Dagegen kommt dem Begriffe „Angehöriger des deutschen Reiches zu Jahresanfang 1883 berliner Zeit“ in alle Ewigkeit dieselbe Zahl zu.

§ 47. Dass eine Zahlangabe etwas Thatsächliches von unserer Auffassung Unabhängiges ausdrückt, kann nur den Wunder nehmen, welcher den Begriff für etwas Subjectives gleich der Vorstellung hält. Aber diese Ansicht ist falsch. Wenn wir z. B. den Begriff des Körpers dem des Schweren oder den des Wallfisches dem des Säugethiers unterordnen, so behaupten wir damit etwas Objectives. Wenn nun die Begriffe subjectiv wären, so wäre auch die Unterordnung des einen unter den andern als Beziehung zwischen ihnen etwas Subjectives wie eine Beziehung zwischen Vorstellungen. Freilich auf den ersten Blick scheint der Satz

„alle Wallfische sind Säugethiere“

von Thieren, nicht von Begriffen zu handeln; aber, wenn man fragt, von welchem Thiere denn die Rede sei, so kann man kein einziges aufweisen. Gesetzt, es liege ein Wallfisch vor, so behauptet doch von diesem unser Satz nichts. Man könnte aus ihm nicht schliessen, das vorliegende Thier sei ein Säugethier, ohne den Satz hinzuzunehmen, dass es ein Wallfisch ist, wovon unser Satz nichts enthält. Ueberhaupt ist es unmöglich, von einem Gegenstande zu sprechen, ohne ihn irgendwie zu bezeichnen oder zu benennen. Das Wort „Wallfisch“ benennt aber kein Einzelwesen. Wenn man erwidert, allerdings sei nicht von einem einzelnen, bestimmten Gegenstande die Rede, wohl aber von einem unbestimmten, so meine ich, dass „unbestimmter Gegenstand“ nur ein andrer Ausdruck für „Begriff“ ist, und zwar ein schlechter, wider-

spruchsvoller. Mag immerhin unser Satz nur durch Beobachtung an einzelnen Thieren gerechtfertigt werden können, dies beweist nichts für seinen Inhalt. Für die Frage, wovon er handelt, ist es gleichgiltig, ob er wahr ist oder nicht, oder aus welchen Gründen wir ihn für wahr halten. Wenn nun der Begriff etwas Objectives ist, so kann auch eine Aussage von ihm etwas Thatsächliches enthalten.

§ 48. Der Schein, der vorhin bei einigen Beispielen entstand, dass demselben verschiedene Zahlen zukämen, erklärt sich daraus, dass dabei Gegenstände als Träger der Zahl angenommen wurden. Sobald wir den wahren Träger, den Begriff, in seine Rechte einsetzen, zeigen sich die Zahlen so ausschliessend wie in ihrem Bereiche die Farben.

Wir sehen nun auch, wie man dazu kommt, die Zahl durch Abstraction von den Dingen gewinnen zu wollen. Was man dadurch erhält, ist der Begriff, an dem man dann die Zahl entdeckt. So geht die Abstraction in der That oft der Bildung eines Zahlurtheils vorher. Die Verwechselung ist dieselbe, wie wenn man sagen wollte: der Begriff der Feuergefährlichkeit wird erhalten, indem man ein Wohnhaus aus Fachwerk mit einem Brettergiebel und Strohdach baut, dessen Schornsteine undicht sind.

Die sammelnde Kraft des Begriffes übertrifft weit die vereinigende der synthetischen Apperception. Durch diese wäre es nicht möglich, die Angehörigen des deutschen Reiches zu einem Ganzen zu verbinden; wohl aber kann man sie unter dem Begriff „Angehöriger des deutschen Reiches“ bringen und zählen.

Nun wird auch die grosse Anwendbarkeit der Zahl erklärlich. Es ist in der That räthselhaft, wie dasselbe von äussern und zugleich von innern Erscheinungen, von Räumlichem und Zeitlichem und von Raum- und Zeitlosem ausgesagt werden könne. Dies findet nun in der Zahlangabe auch gar nicht statt. Nur den Begriffen, unter die das

Aeussere und Innere, das Räumliche und Zeitliche, das Raum- und Zeitlose gebracht ist, werden Zahlen beigelegt.

§ 49. Wir finden für unsere Ansicht eine Bestätigung bei Spinoza, der sagt*): „Ich antworte, dass ein Ding blos rücksichtlich seiner Existenz, nicht aber seiner Essenz eines oder einzig genannt wird; denn wir stellen die Dinge unter Zahlen nur vor, nachdem sie auf ein gemeinsames Maass gebracht sind. Wer z. B. ein Sesterz und einen Imperial in der Hand hält, wird an die Zweizahl nicht denken, wenn er nicht dieses Sesterz und diesen Imperial mit einem und dem nämlichen Namen, nämlich Geldstück oder Münze belegen kann: dann kann er bejahen, dass er zwei Geldstücke oder Münzen habe; weil er nicht nur das Sesterz, sondern auch den Imperial mit den Namen Münze bezeichnet." Wenn er fortfährt: „Hieraus ist klar, dass ein Ding eins oder einzig genannt wird, nur nachdem ein anderes Ding ist vorgestellt worden, das (wie gesagt) mit ihm übereinkommt," und wenn er meint, dass man nicht im eigentlichen Sinne Gott einen oder einzig nennen könne, weil wir von seiner Essenz keinen abstracten Begriff bilden könnten, so irrt er in der Meinung, der Begriff könne nur unmittelbar durch Abstraction von mehren Gegenständen gewonnen werden. Vielmehr kann man auch von den Merkmalen aus zu dem Begriffe gelangen; und dann ist es möglich, das kein Ding unter ihn fällt. Wenn dies nicht vorkäme, würde man nie die Existenz verneinen können, und damit verlöre auch die Bejahung der Existenz ihren Inhalt.

§ 50. E. Schröder**) hebt hervor, dass, wenn von Häufigkeit eines Dinges solle gesprochen werden können, der Name dieses Dinges stets ein Gattungsname, ein allmeines Begriffswort (notio communis) sein müsse: „Sobald man nämlich einen Gegenstand vollständig — mit allen

*) Baumann a. a. O. Bd. I, S. 169.

**) A. a. O. S. 6.

seinen Eigenschaften und Beziehungen — in's Auge fasst, so wird derselbe einzig in der Welt dastehen und seines gleichen nicht weiter haben. Der Name des Gegenstandes wird alsdann den Charakter eines Eigennamens (nomen proprium) tragen und kann der Gegenstand nicht als ein wiederholt vorkommender gedacht werden. Dieses gilt aber nicht allein von concreten Gegenständen, es gilt überhaupt von jedem Dinge, mag dessen Vorstellung auch durch Abstractionen zu Stande kommen, wofern nur diese Vorstellung solche Elemente in sich schliesst, welche genügen, das betreffende Ding zu einem völlig bestimmten zu machen..... Das letztere" (Object der Zählung zu werden) „wird bei einem Dinge erst insofern möglich, als man von einigen ihm eigenthümlichen Merkmalen und Beziehungen, durch die es sich von allen andern Dingen unterscheidet, dabei absieht oder abstrahirt, wodurch dann erst der Name des Dinges zu einem auf mehre Dinge anwendbaren Begriffe wird."

§ 51. Das Wahre in dieser Ausführung ist in so schiefe und irreführende Ausdrücke gekleidet, dass eine Entwirrung und Sichtung geboten ist. Zunächst ist es unpassend, ein allgemeines Begriffswort Namen eines Dinges zu nennen. Dadurch entsteht der Schein, als ob die Zahl Eigenschaft eines Dinges wäre. Ein allgemeines Begriffswort bezeichnet eben einen Begriff. Nur mit dem bestimmten Artikel oder einem Demonstrativpronomen gilt es als Eigenname eines Dinges, hört aber damit auf, als Begriffswort zu gelten. Der Name eines Dinges ist ein Eigenname. Ein Gegenstand kommt nicht wiederholt vor, sondern mehre Gegenstände fallen unter einen Begriff. Dass ein Begriff nicht nur durch Abstraction von den Dingen erhalten wird, die unter ihn fallen, ist schon Spinoza gegenüber bemerkt. Hier füge ich hinzu, dass ein Begriff dadurch nicht aufhört, Begriff zu sein, dass nur ein einziges Ding unter ihn fällt, welches demnach völlig durch ihn bestimmt ist. Einem solchen Begriffe (z. B. Begleiter der Erde) kommt eben die Zahl 1 zu,

die in demselben Sinne Zahl ist wie 2 und 3. Bei einem Begriffe fragt es sich immer, ob etwas und was etwa unter ihn falle. Bei einem Eigennamen sind solche Fragen sinnlos. Man darf sich nicht dadurch täuschen lassen, dass die Sprache einen Eigennamen, z. B. Mond, als Begriffswort verwendet und umgekehrt; der Unterschied bleibt trotzdem bestehen. Sobald ein Wort mit dem unbestimmten Artikel oder im Plural ohne Artikel gebraucht wird, ist es Begriffswort.

§ 52. Eine weitere Bestätigung für die Ansicht, dass die Zahl Begriffen beigelegt wird, kann in dem deutschen Sprachgebrauche gefunden werden, dass man zehn Mann, vier Mark, drei Fass sagt. Der Singular mag hier andeuten, dass der Begriff gemeint ist, nicht das Ding. Der Vorzug dieser Ausdrucksweise tritt besonders bei der Zahl 0 hervor. Sonst freilich legt die Sprache den Gegenständen, nicht dem Begriffe Zahl bei: man sagt „Zahl der Ballen," wie man „Gewicht der Ballen" sagt. So spricht man scheinbar von Gegenständen, während man in Wahrheit von einem Begriffe etwas aussagen will. Dieser Sprachgebrauch ist verwirrend. Der Ausdruck „vier edle Rosse" erweckt den Schein, als ob „vier" den Begriff „edles Ross" ebenso wie „edel" den Begriff „Ross" näher bestimme. Jedoch ist nur „edel" ein solches Merkmal; durch das Wort „vier" sagen wir etwas von einem Begriffe aus.

§ 53. Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes. So ist „rechtwinklig" nicht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges Dreieck"; aber der Satz, dass es kein rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck" aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt.

In dieser Beziehung hat die Existenz Aehnlichkeit mit der Zahl. Es ist ja Bejahung der Existenz nichts Anderes als Verneinung der Nullzahl. Weil Existenz Eigenschaft des Begriffes ist, erreicht der ontologische Beweis von der Existenz Gottes sein Ziel nicht. Ebensowenig wie die Existenz ist aber die Einzigkeit Merkmal des Begriffes „Gott". Die Einzigkeit kann nicht zur Definition dieses Begriffes gebraucht werden, wie man auch die Festigkeit, Geräumigkeit, Wohnlichkeit eines Hauses nicht mit Steinen, Mörtel und Balken zusammen bei seinem Baue verwenden kann. Man darf jedoch daraus, dass etwas Eigenschaft eines Begriffes ist, nicht allgemein schliessen, dass es aus dem Begriffe, d. h. aus dessen Merkmalen nicht gefolgert werden könne. Unter Umständen ist dies möglich, wie man aus der Art der Bausteine zuweilen einen Schluss auf die Dauerhaftigkeit eines Gebäudes machen kann. Daher wäre es zuviel behauptet, dass niemals aus den Merkmalen eines Begriffes auf die Einzigkeit oder Existenz geschlossen werden könne; nur kann dies nie so unmittelbar geschehen, wie man das Merkmal eines Begriffes einem unter ihn fallenden Gegenstande als Eigenschaft beilegt.

Es wäre auch falsch zu leugnen, dass Existenz und Einzigkeit jemals Merkmale von Begriffen sein könnten. Sie sind nur nicht Merkmale der Begriffe, denen man sie der Sprache folgend zuschreiben möchte. Wenn man z. B. alle Begriffe, unter welche nur Ein Gegenstand fällt, unter einen Begriff sammelt, so ist die Einzigkeit Merkmal dieses Begriffes. Unter ihn würde z. B. der Begriff „Erdmond," aber nicht der sogenannte Himmelskörper fallen. So kann man einen Begriff unter einen höhern, so zu sagen einen Begriff zweiter Ordnung fallen lassen. Dies Verhältniss ist aber nicht mit dem der Unterordnung zu verwechseln.

§ 54. Jetzt wird es möglich sein, die Einheit befriedigend zu erklären. E. Schröder sagt auf S. 7 seines genannten Lehrbuches: „Jener Gattungsname oder Begriff

wird die Benennung der auf die angegebene Weise gebildeten Zahl genannt und macht das Wesen ihrer Einheit aus."

In der That, wäre es nicht am passendsten, einen Begriff Einheit zu nennen in Bezug auf die Anzahl, welche ihm zukommt? Wir können dann den Aussagen über die Einheit, dass sie von der Umgebung abgesondert und untheilbar sei, einen Sinn abgewinnen. Denn der Begriff, dem die Zahl beigelegt wird, grenzt im Allgemeinen das unter ihn Fallende in bestimmter Weise ab. Der Begriff „Buchstabe des Wortes Zahl" grenzt das Z gegen das a, dieses gegen das h u. s. w. ab. Der Begriff „Silbe des Wortes Zahl" hebt das Wort als ein Ganzes und in dem Sinne Untheilbares heraus, dass die Theile nicht mehr unter den Begriff „Silbe des Wortes Zahl" fallen. Nicht alle Begriffe sind so beschaffen. Wir können z. B. das unter den Begriff des Rothen Fallende in mannigfacher Weise zertheilen, ohne dass die Theile aufhören, unter ihn zu fallen. Einem solchen Begriffe kommt keine endliche Zahl zu. Der Satz von der Abgegrenztheit und Untheilbarkeit der Einheit lässt sich demnach so aussprechen:

Einheit in Bezug auf eine endliche Anzahl kann nur ein solcher Begriff sein, der das unter ihn Fallende bestimmt abgrenzt und keine beliebige Zertheilung gestattet.

Man sieht aber, dass Untheilbarkeit hier eine besondere Bedeutung hat.

Nun beantworten wir leicht die Frage, wie die Gleichheit mit der Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen sei. Das Wort „Einheit" ist hier in doppeltem Sinne gebraucht. Gleich sind die Einheiten in der oben erklärten Bedeutung dieses Worts. In dem Satze: „Jupiter hat vier Monde" ist die Einheit „Jupitersmond". Unter diesen Begriff fällt sowohl I als auch II, als auch III, als auch IV. Daher kann man sagen: die Einheit, auf die I bezogen wird, ist gleich der Einheit, auf die II bezogen wird u. s. f. Da haben wir die Gleichheit. Wenn man aber die Unterscheid-

barkeit der Einheiten behauptet, so versteht man darunter die der gezählten Dinge.

IV. Der Begriff der Anzahl.

Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand.

§ 55. Nachdem wir erkannt haben, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält, können wir versuchen, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen durch die der 0 und der 1 zu ergänzen.

Es liegt nahe zu erklären: einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn kein Gegenstand unter ihn fällt. Aber hier scheint an die Stelle der 0 das gleichbedeutende „kein" getreten zu sein; deshalb ist folgender Wortlaut vorzuziehen: einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter diesen Begriff falle.

In ähnlicher Weise könnte man sagen: einem Begriffe F kommt die Zahl 1 zu, wenn nicht allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter F falle, und wenn aus den Sätzen

„a fällt unter F" und „b fällt unter F"

allgemein folgt, dass a und b dasselbe sind.

Es bleibt noch übrig, den Uebergang von einer Zahl zur nächstfolgenden allgemein zu erklären. Wir versuchen folgenden Wortlaut: dem Begriffe F kommt die Zahl $(n+1)$ zu, wenn es einen Gegenstand a giebt, der unter F fällt und so beschaffen ist, dass dem Begriffe „unter F fallend, aber nicht a" die Zahl n zukommt.

§ 56. Diese Erklärungen bieten sich nach unsern bisherigen Ergebnissen so ungezwungen dar, dass es einer Darlegung bedarf, warum sie uns nicht genügen können.

Am ehesten wird die letzte Definition Bedenken erregen; denn genau genommen ist uns der Sinn des Ausdruckes

„dem Begriffe G kommt die Zahl n zu“ ebenso unbekannt wie der des Ausdruckes „dem Begriffe F kommt die Zahl (n + 1) zu.“ Zwar können wir mittels dieser und der vorletzten Erklärung sagen, was es bedeute

„dem Begriffe F kommt die Zahl 1 + 1 zu,“

und dann, indem wir dies benutzen, den Sinn des Ausdruckes

„dem Begriffe F kommt die Zahl 1 + 1 + 1 zu“

angeben u. s. w.; aber wir können — um ein krasses Beispiel zu geben — durch unsere Definitionen nie entscheiden, ob einem Begriffe die Zahl Julius Caesar zukomme, ob dieser bekannte Eroberer Galliens eine Zahl ist oder nicht. Wir können ferner mit Hilfe unserer Erklärungsversuche nicht beweisen, dass a = b sein muss, wenn dem Begriffe F die Zahl a zukommt, und wenn demselben die Zahl b zukommt. Der Ausdruck „die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt“ wäre also nicht zu rechtfertigen und dadurch würde es überhaupt unmöglich, eine Zahlengleichheit zu beweisen, weil wir gar nicht eine bestimmte Zahl fassen könnten. Es ist nur Schein, dass wir die 0, die 1 erklärt haben; in Wahrheit haben wir nur den Sinn der Redensarten

„die Zahl 0 kommt zu,“

„die Zahl 1 kommt zu“

festgestellt; aber es nicht erlaubt, hierin die 0, die 1 als selbständige, wiedererkennbare Gegenstände zu unterscheiden.

§ 57. Es ist hier der Ort, unsern Ausdruck, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte, etwas genauer ins Auge zu fassen. In dem Satze „dem Begriffe F kommt die Zahl 0 zu“ ist 0 nur ein Theil des Praedicates, wenn wir als sachliches Subject den Begriff F betrachten. Deshalb habe ich es vermieden, eine Zahl wie 0, 1, 2 Eigenschaft eines Begriffes zu nennen. Die einzelne Zahl erscheint eben dadurch, dass sie nur einen Theil der Aussage bildet, als selbständiger Gegenstand. Ich habe schon oben darauf aufmerksam gemacht, dass man „die 1“ sagt und durch den bestimmten Artikel 1 als Gegenstand hinstellt.

Diese Selbständigkeit zeigt sich überall in der Arithmetik, z. B. in der Gleichung $1 + 1 = 2$. Da es uns hier darauf ankommt, den Zahlbegriff so zu fassen, wie er für die Wissenschaft brauchbar ist, so darf es uns nicht stören, dass im Sprachgebrauche des Lebens die Zahl auch attributiv erscheint. Dies lässt sich immer vermeiden. Z. B. kann man den Satz „Jupiter hat vier Monde" umsetzen in „die Zahl der Jupitersmonde ist vier.". Hier darf das „ist" nicht als blosse Copula betrachtet werden, wie in dem Satze „der Himmel ist blau". Das zeigt sich darin, dass man sagen kann: „die Zahl der Jupitersmonde ist die vier" oder „ist die Zahl 4". Hier hat „ist" den Sinn von „ist gleich," „ist dasselbe wie". Wir haben also eine Gleichung, die behauptet, dass der Ausdruck „die Zahl der Jupitersmonde" denselben Gegenstand bezeichne wie das Wort „vier." Und die Form der Gleichung ist die herrschende in der Arithmetik. Gegen diese Auffassung streitet nicht, dass in dem Worte „vier" nichts von Jupiter oder von Mond enthalten ist. Auch in dem Namen „Columbus" liegt nichts von Entdecken oder von Amerika und dennoch wird derselbe Mann Columbus und der Entdecker Amerikas genannt.

§ 58. Man könnte einwenden, dass wir uns von dem Gegenstande, den wir Vier oder die Anzahl der Jupitersmonde nennen, als von etwas Selbständigem durchaus keine Vorstellung*) machen können. Aber die Selbständigkeit, die wir der Zahl gegeben haben, ist nicht Schuld daran. Zwar glaubt man leicht, dass in der Vorstellung von vier Augen eines Würfels etwas vorkomme, was dem Worte „vier" entspräche; aber das ist Täuschung. Man denke an eine grüne Wiese und versuche, ob sich die Vorstellung ändert, wenn man den unbestimmten Artikel durch das Zahlwort „Ein" ersetzt. Es kommt nichts hinzu, während doch dem Worte „grün" etwas in der Vorstellung entspricht.

*) „Vorstellung" in dem Sinne von etwas Bildartigem genommen.

Wenn man sich das gedruckte Wort „Gold“ vorstellt, wird man zunächst an keine Zahl dabei denken. Fragt man sich nun, aus wieviel Buchstaben es bestehe, so ergiebt sich die Zahl 4; aber die Vorstellung wird dadurch nicht etwa bestimmter, sondern kann ganz unverändert bleiben. Der hinzutretende Begriff „Buchstabe des Wortes Gold“ ist eben das, woran wir die Zahl entdecken. Bei den vier Augen eines Würfels ist die Sache etwas versteckter, weil der Begriff sich uns durch die Aehnlichkeit der Augen so unmittelbar aufdrängt, dass wir sein Dazwischentreten kaum bemerken. Die Zahl kann weder als selbständiger Gegenstand noch als Eigenschaft an einem äussern Dinge vorgestellt werden, weil sie weder etwas Sinnliches noch Eigenschaft eines äussern Dinges ist. Am deutlichsten ist die Sache wohl bei der Zahl 0. Man wird vergebens versuchen, sich 0 sichtbare Sterne vorzustellen. Zwar kann man sich den Himmel ganz mit Wolken überzogen denken; aber hierin ist nichts, was dem Worte „Stern“ oder der 0 entspräche. Man stellt sich nur eine Sachlage vor, die zu dem Urtheile veranlassen kann: es ist jetzt kein Stern zu sehen.

§ 59. Jedes Wort erweckt vielleicht irgendeine Vorstellung in uns, sogar ein solches wie „nur“; aber sie braucht nicht dem Inhalte des Wortes zu entsprechen; sie kann in andern Menschen eine ganz andere sein. Man wird sich dann wohl eine Sachlage vorstellen, die zu einem Satze auffordert, in welchem das Wort vorkommt; oder es ruft etwa das gesprochene Wort das geschriebene ins Gedächtniss zurück.

Dies findet nicht nur bei Partikeln statt. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass wir keine Vorstellung unserer Entfernung von der Sonne haben. Denn, wenn wir auch die Regel kennen, wie oft wir einen Maasstab vervielfältigen müssen, so misslingt doch jeder Versuch, nach dieser Regel uns ein Bild zu entwerfen, das auch nur einigermaassen dem Gewollten nahe kommt. Das ist aber kein Grund, die Rich-

tigkeit der Rechnung zu bezweifeln, durch welche die Entfernung gefunden ist, und hindert uns in keiner Weise, weitere Schlüsse auf das Bestehen dieser Entfernung zu gründen.

§ 60. Selbst ein so concretes Ding wie die Erde können wir uns nicht so vorstellen, wie wir erkannt haben, dass es ist; sondern wir begnügen uns mit einer Kugel von mässiger Grösse, die uns als Zeichen für die Erde gilt; aber wir wissen, dass diese sehr davon verschieden ist. Obwohl nun unsere Vorstellung das Gewollte oft gar nicht trifft, so urtheilen wir doch mit grosser Sicherheit über einen Gegenstand wie die Erde auch da, wo die Grösse in Betracht kommt.

Wir werden durch das Denken gar oft über das Vorstellbare hinausgeführt, ohne damit die Unterlage für unsere Schlüsse zu verlieren. Wenn auch, wie es scheint, uns Menschen Denken ohne Vorstellungen unmöglich ist, so kann doch deren Zusammenhang mit dem Gedachten ganz äusserlich, willkührlich und conventionell sein.

Es ist also die Unvorstellbarkeit des Inhaltes eines Wortes kein Grund, ihm jede Bedeutung abzusprechen oder es vom Gebrauche auszuschliessen. Der Schein des Gegentheils entsteht wohl dadurch, dass wir die Wörter vereinzelt betrachten und nach ihrer Bedeutung fragen, für welche wir dann eine Vorstellung nehmen. So scheint ein Wort keinen Inhalt zu haben, für welches uns ein entsprechendes inneres Bild fehlt. Man muss aber immer einen vollständigen Satz ins Auge fassen. Nur in ihm haben die Wörter eigentlich eine Bedeutung. Die innern Bilder, die uns dabei etwa vorschweben, brauchen nicht den logischen Bestandtheilen des Urtheils zu entsprechen. Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Theile ihren Inhalt.

Diese Bemerkung scheint mir geeignet, auf manche

schwierige Begriffe wie den des Unendlichkleinen*) ein Licht zu werfen, und ihre Tragweite beschränkt sich wohl nicht auf die Mathematik.

Die Selbständigkeit, die ich für die Zahl in Anspruch nehme, soll nicht bedeuten, dass ein Zahlwort ausser dem Zusammenhange eines Satzes etwas bezeichne, sondern ich will damit nur dessen Gebrauch als Praedicat oder Attribut ausschliessen, wodurch seine Bedeutung etwas verändert wird.

§ 61. Aber, wendet man vielleicht ein, mag auch die Erde eigentlich unvorstellbar sein, so ist sie doch ein äusseres Ding, das einen bestimmten Ort hat; aber wo ist die Zahl 4? sie ist weder ausser uns noch in uns. Das ist in räumlichem Sinne verstanden richtig. Eine Ortsbestimmung der Zahl 4 hat keinen Sinn; aber daraus folgt nur, dass sie kein räumlicher Gegenstand ist, nicht, dass sie überhaupt keiner ist. Nicht jeder Gegenstand ist irgendwo. Auch unsere Vorstellungen**) sind in diesem Sinne nicht in uns (subcutan). Da sind Ganglienzellen, Blutkörperchen und dergl., aber keine Vorstellungen. Räumliche Praedicate sind auf sie nicht anwendbar: die eine ist weder rechts noch links von der andern; Vorstellungen haben keine in Millimetern angebbaren Entfernungen von einander. Wenn wir sie dennoch in uns nennen, so wollen wir sie damit als subjectiv bezeichnen.

Aber wenn auch das Subjective keinen Ort hat, wie ist es möglich, dass die objective Zahl 4 nirgendwo sei? Nun ich behaupte, dass darin gar kein Widerspruch liegt. Sie ist in der That genau dieselbe für jeden, der sich mit ihr beschäftigt; aber dies hat mit Räumlichkeit nichts zu schaffen. Nicht jeder objective Gegenstand hat einen Ort.

---

*) Es kommt darauf an, den Sinn einer Gleichung wie

$$d\,f(x) = g(x)\,dx$$

zu definiren, nicht aber darauf, eine von zwei verschiedenen Punkten begrenzte Strecke aufzuweisen, deren Länge dx wäre.

**) Dies Wort rein psychologisch, nicht psychophysisch verstanden.

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen.

§ 62. Wie soll uns denn eine Zahl gegeben sein, wenn wir keine Vorstellung oder Anschauung von ihr haben können? Nur im Zusammenhange eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. Es wird also darauf ankommen, den Sinn eines Satzes zu erklären, in dem ein Zahlwort vorkommt. Das giebt zunächst noch viel der Willkühr anheim. Aber wir haben schon festgestellt, dass unter den Zahlwörtern selbständige Gegenstände zu verstehen sind. Damit ist uns eine Gattung von Sätzen gegeben, die einen Sinn haben müssen, der Sätze, welche ein Wiedererkennen ausdrücken. Wenn uns das Zeichen a einen Gegenstand bezeichnen soll, so müssen wir ein Kennzeichen haben, welches überall entscheidet, ob b dasselbe sei wie a, wenn es auch nicht immer in unserer Macht steht, dies Kennzeichen anzuwenden. In unserm Falle müssen wir den Sinn des Satzes

„die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist dieselbe, welche dem Begriffe G zukommt“

erklären; d. h. wir müssen den Inhalt dieses Satzes in anderer Weise wiedergeben, ohne den Ausdruck

„die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt“

zu gebrauchen. Damit geben wir ein allgemeines Kennzeichen für die Gleichheit von Zahlen an. Nachdem wir so ein Mittel erlangt haben, eine bestimmte Zahl zu fassen und als dieselbe wiederzuerkennen, können wir ihr ein Zahlwort zum Eigennamen geben.

§ 63. Ein solches Mittel nennt schon Hume*): „Wenn zwei Zahlen so combinirt werden, dass die eine immer eine Einheit hat, die jeder Einheit der andern entspricht, so geben wir sie als gleich an.“ Es scheint in neuerer Zeit die

*) Baumann a. a. O. Bd. II. S. 565.

Meinung unter den Mathematikern*) vielfach Anklang gefunden zu haben, dass die Gleichheit der Zahlen mittels der eindeutigen Zuordnung definirt werden müsse. Aber es erheben sich zunächst logische Bedenken und Schwierigkeiten, an denen wir nicht ohne Prüfung vorbeigehen dürfen.

Das Verhältniss der Gleichheit kommt nicht nur bei Zahlen vor. Daraus scheint zu folgen, dass es nicht für diesen Fall besonders erklärt werden darf. Man sollte denken, dass der Begriff der Gleichheit schon vorher feststände, und dass dann aus ihm und dem Begriffe der Anzahl sich ergeben müsste, wann Anzahlen einander gleich wären, ohne dass es dazu noch einer besondern Definition bedürfte.

Hiergegen ist zu bemerken, dass für uns der Begriff der Anzahl noch nicht feststeht, sondern erst mittels unserer Erklärung bestimmt werden soll. Unsere Absicht ist, den Inhalt eines Urtheils zu bilden, der sich so als eine Gleichung auffassen lässt, dass jede Seite dieser Gleichung eine Zahl ist. Wir wollen also nicht die Gleichheit eigens für diesen Fall erklären, sondern mittels des schon bekannten Begriffes der Gleichheit, das gewinnen, was als gleich zu betrachten ist. Das scheint freilich eine sehr ungewöhnliche Art der Definition zu sein, welche wohl von den Logikern noch nicht genügend beachtet ist; dass sie aber nicht unerhört ist, mögen einige Beispiele zeigen.

§ 64. Das Urtheil: „die Gerade a ist parallel der Gerade b," in Zeichen:

$$a /\!/ b,$$

kann als Gleichung aufgefasst werden. Wenn wir dies thun, erhalten wir den Begriff der Richtung und sagen: „die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b".

---

*) Vergl. E. Schröder a. a. O. S. 7 und 8. E. Kossak, die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums. Berlin, 1872. S. 16. G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

Wir ersetzen also das Zeichen // durch das allgemeinere =, indem wir den besondern Inhalt des ersteren an a und b vertheilen. Wir zerspalten den Inhalt in anderer als der ursprünglichen Weise und gewinnen dadurch einen neuen Begriff. Oft fasst man freilich die Sache umgekehrt auf, und manche Lehrer definiren: parallele Geraden sind solche von gleicher Richtung. Der Satz: „wenn zwei Geraden einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel" lässt sich dann mit Berufung auf den ähnlich lautenden Gleichheitssatz sehr bequem beweisen. Nur schade, dass der wahre Sachverhalt damit auf den Kopf gestellt wird! Denn alles Geometrische muss doch wohl ursprünglich anschaulich sein. Nun frage ich, ob jemand eine Anschauung von der Richtung einer Gerade hat. Von der Gerade wohl! aber unterscheidet man in der Anschauung von dieser Gerade noch ihre Richtung? Schwerlich! Dieser Begriff wird erst durch eine an die Anschauung anknüpfende geistige Thätigkeit gefunden. Dagegen hat man eine Vorstellung von parallelen Geraden. Jener Beweis kommt nur durch eine Erschleichung zu Stande, indem man durch den Gebrauch des Wortes „Richtung" das zu Beweisende voraussetzt; denn wäre der Satz: „wenn zwei Geraden einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel" unrichtig, so könnte man a // b nicht in eine Gleichung verwandeln.

So kann man aus dem Parallelismus von Ebenen einen Begriff erhalten, der dem der Richtung bei Geraden entspricht. Ich habe dafür den Namen „Stellung" gelesen. Aus der geometrischen Aehnlichkeit geht der Begriff der Gestalt hervor, so dass man z. B. statt „die beiden Dreiecke sind ähnlich" sagt: „die beiden Dreiecke haben gleiche Gestalt" oder „die Gestalt des einen Dreiecks ist gleich der Gestalt des andern". So kann man auch aus der collinearen Verwandtschaft geometrischer Gebilde einen Begriff gewinnen, für den ein Name wohl noch fehlt.

§ 65. Um nun z. B. vom Parallelismus*) auf den Begriff der Richtung zu kommen, versuchen wir folgende Definition: der Satz

„die Gerade a ist parallel der Gerade b"

sei gleichbedeutend mit

„die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b".

Diese Erklärung weicht insofern von dem Gewohnten ab, als sie scheinbar die schon bekannte Beziehung der Gleichheit bestimmt, während sie in Wahrheit den Ausdruck „die Richtung der Gerade a" einführen soll, der nur nebensächlich vorkommt. Daraus entspringt ein zweites Bedenken, ob wir nicht durch eine solche Festsetzung in Widersprüche mit den bekannten Gesetzen der Gleichheit verwickelt werden könnten. Welches sind diese? Sie werden als analytische Wahrheiten aus dem Begriffe selbst entwickelt werden können. Nun definirt Leibniz**):

„Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate".

Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an. Ob man wie Leibniz „dasselbe" sagt oder „gleich", ist unerheblich. „Dasselbe" scheint zwar eine vollkommene Uebereinstimmung, „gleich" nur eine in dieser oder jener Hinsicht auszudrücken; man kann aber eine solche Redeweise annehmen, dass dieser Unterschied wegfällt, indem man z. B. statt „die Strecken sind in der Länge gleich" sagt „die Länge der Strecken ist gleich" oder „dieselbe," statt „die Flächen sind in der Farbe gleich" „die Farbe der Flächen ist gleich". Und so haben wir das Wort oben in den

*) Um mich bequemer ausdrücken zu können und leichter verstanden zu werden, spreche ich hier vom Parallelismus. Das Wesentliche dieser Erörterungen wird leicht auf den Fall der Zahlengleichheit übertragen werden können.

**) Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

Beispielen gebraucht. In der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten.

Um unsern Definitionsversuch der Richtung einer Gerade zu rechtfertigen, müssten wir also zeigen, dass man

die Richtung von a

überall durch

die Richtung von b

ersetzen könne, wenn die Gerade a der Gerade b parallel ist. Dies wird dadurch vereinfacht, dass man zunächst von der Richtung einer Gerade keine andere Aussage kennt als die Uebereinstimmung mit der Richtung einer andern Gerade. Wir brauchten also nur die Ersetzbarkeit in einer solchen Gleichheit nachzuweisen oder in Inhalten, welche solche Gleichheiten als Bestandtheile*) enthalten würden. Alle andern Aussagen von Richtungen müssten erst erklärt werden und für diese Definitionen können wir die Regel aufstellen, dass die Ersetzbarkeit der Richtung einer Gerade durch die einer ihr parallelen gewahrt bleiben muss.

§ 66. Aber noch ein drittes Bedenken erhebt sich gegen unsern Definitionsversuch. In dem Satze

„die Richtung von a ist gleich der Richtung von b"

erscheint die Richtung von a als Gegenstand**) und wir haben in unserer Definition ein Mittel, diesen Gegenstand wiederzuerkennen, wenn er etwa in einer andern Verkleidung etwa als Richtung von b auftreten sollte. Aber dies Mittel

*) In einem hypothetischen Urtheile könnte z. B. eine Gleichheit von Richtungen als Bedingung oder Folge vorkommen.

**) Der bestimmte Artikel deutet dies an. Begriff ist für mich ein mögliches Praedicat eines singulären beurtheilbaren Inhalts, Gegenstand ein mögliches Subject eines solchen. Wenn wir in dem Satze

„die Richtung der Fernrohraxe ist gleich der Richtung der Erdaxe"

die Richtung der Fernrohraxe als Subject ansehen, so ist das Praedicat „gleich der Richtung der Erdaxe". Dies ist ein Begriff. Aber die Richtung der Erdaxe ist nur ein Theil des Praedicates; sie ist ein Gegenstand, da sie auch zum Subjecte gemacht werden kann.

der Umfang*) des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“

§ 69. Dass diese Erklärung zutreffe, wird zunächst vielleicht wenig einleuchten. Denkt man sich unter dem Umfange eines Begriffes nicht etwas Anderes? Was man sich darunter denkt, erhellt aus den ursprünglichen Aussagen, die von Begriffsumfängen gemacht werden können. Es sind folgende:

1. die Gleichheit,
2. dass der eine umfassender als der andere sei.

Nun ist der Satz:

der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“ ist gleich dem Umfange des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe G“

immer dann und nur dann wahr, wenn auch der Satz

„dem Begriffe F kommt dieselbe Zahl wie dem Begriffe G zu“

wahr ist. Hier ist also voller Einklang.

Man sagt zwar nicht, dass eine Zahl umfassender als eine andere sei in dem Sinne, wie der Umfang eines Begriffes umfassender als der eines andern ist; aber der Fall, dass

der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“

umfassender sei als

*) Ich glaube, dass für „Umfang des Begriffes“ einfach „Begriff“ gesagt werden könnte. Aber man würde zweierlei einwenden:

1. dies stehe im Widerspruche mit meiner früheren Behauptung dass die einzelne Zahl ein Gegenstand sei, was durch den bestimmten Artikel in Ausdrücken wie „die Zwei“ und durch die Unmöglichkeit angedeutet werde, von Einsen, Zweien u. s. w. im Plural zu sprechen, sowie dadurch, dass die Zahl nur einen Theil des Praedicats der Zahlangabe ausmache;

2. dass Begriffe von gleichem Umfange sein können, ohne zusammenzufallen.

Ich bin nun zwar der Meinung, dass beide Einwände gehoben werden können; aber das möchte hier zu weit führen. Ich setze voraus, dass man wisse, was der Umfang eines Begriffes sei.

der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe G“ kann auch gar nicht vorkommen; sondern, wenn alle Begriffe, die dem G gleichzahlig sind, auch dem F gleichzahlig sind, so sind auch umgekehrt alle Begriffe, die dem F gleichzahlig sind, dem G gleichzahlig. Dies „umfassender“ darf natürlich nicht mit dem „grösser“ verwechselt werden, dass bei Zahlen vorkommt.

Freilich ist noch der Fall denkbar, dass der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“ umfassender oder weniger umfassend wäre als ein anderer Begriffsumfang, der dann nach unserer Erklärung keine Anzahl sein könnte; und es ist nicht üblich, eine Anzahl umfassender oder weniger umfassend als den Umfang eines Begriffes zu nennen; aber es steht auch nichts im Wege, eine solche Redeweise anzunehmen, falls solches einmal vorkommen sollte.

Ergänzung und Bewährung unserer Definition.

§ 70. Definitionen bewähren sich durch ihre Fruchtbarkeit. Solche, die ebensogut wegbleiben könnten, ohne eine Lücke in der Beweisführung zu öffnen, sind als völlig werthlos zu verwerfen.

Versuchen wir also, ob sich bekannte Eigenschaften der Zahlen aus unserer Erklärung der Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ableiten lassen! Wir werden uns hier mit den einfachsten begnügen.

Dazu ist es nöthig, die Gleichzahligkeit noch etwas genauer zu fassen. Wir erklärten sie mittels der beiderseits eindeutigen Zuordnung, und wie ich diesen Ausdruck verstehen will, ist jetzt darzulegen, weil man leicht etwas Anschauliches darin vermuthen könnte.

Betrachten wir folgendes Beispiel! Wenn ein Kellner sicher sein will, dass er ebensoviele Messer als Teller auf den Tisch legt, braucht er weder diese noch jene zu zählen,

wenn er nur rechts neben jeden Teller ein Messer legt, sodass jedes Messer auf dem Tische sich rechts neben einem Teller befindet. Die Teller und Messer sind so beiderseits eindeutig einander zugeordnet und zwar durch das gleiche Lagenverhältniss. Wenn wir in dem Satze

„a liegt rechts neben A"

für a und A andere und andere Gegenstände eingesetzt denken, so macht der hierbei unverändert bleibende Theil des Inhalts das Wesen der Beziehung aus. Verallgemeinern wir dies!

Indem wir von einem beurtheilbaren Inhalte, der von einem Gegenstande a und von einem Gegenstande b handelt, a und b absondern, so behalten wir einen Beziehungsbegriff übrig, der demnach in doppelter Weise ergänzungsbedürftig ist. Wenn wir in dem Satze:

„die Erde hat mehr Masse als der Mond"

„die Erde" absondern, so erhalten wir den Begriff „mehr Masse als der Mond habend". Wenn wir dagegen den Gegenstand „der Mond" absondern, gewinnen wir den Begriff „weniger Masse als die Erde habend". Sondern wir beide zugleich ab, so bleibt ein Beziehungsbegriff zurück, der für sich allein ebensowenig wie ein einfacher Begriff einen Sinn hat: er verlangt immer eine Ergänzung zu einem beurtheilbaren Inhalte. Aber diese kann in verschiedener Weise geschehen: statt Erde und Mond kann ich z. B. Sonne und Erde setzen, und hierdurch wird eben die Absonderung bewirkt.

Die einzelnen Paare zugeordneter Gegenstände verhalten sich in ähnlicher Weise — man könnte sagen als Subjecte — zu dem Beziehungsbegriffe, wie der einzelne Gegenstand zu dem Begriffe, unter den er fällt. Das Subject ist hier ein zusammengesetztes. Zuweilen, wenn die Beziehung eine umkehrbare ist, kommt dies auch sprachlich zum Ausdrucke wie in dem Satze „Peleus und Thetis waren

die Eltern des Achilleus"*). Dagegen wäre es z. B. nicht gut möglich, den Inhalt des Satzes „die Erde ist grösser als der Mond" so wiederzugeben, dass „die Erde und der Mond" als zusammengesetztes Subject erschiene, weil das „und" immer eine gewisse Gleichstellung andeutet. Aber dies thut nichts zur Sache.

Der Beziehungsbegriff gehört also wie der einfache der reinen Logik an. Es kommt hier nicht der besondere Inhalt der Beziehung in Betracht, sondern allein die logische Form. Und was von dieser ausgesagt werden kann, dessen Wahrheit ist analytisch und wird a priori erkannt. Dies gilt von den Beziehungsbegriffen wie von den andern.

Wie

„a fällt unter den Begriff F"

die allgemeine Form eines beurtheilbaren Inhalts ist, der von einem Gegenstande a handelt, so kann man

„a steht in der Beziehung φ zu b"

als allgemeine Form für einen beurtheilbaren Inhalt annehmen, der von dem Gegenstande a und von dem Gegenstande b handelt.

§ 71. Wenn nun jeder Gegenstand, der unter den Begriff F fällt, in der Beziehung φ zu einem unter den Begriff G fallenden Gegenstande steht, und wenn zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, ein unter F fallender Gegenstand in der Beziehung φ steht, so sind die unter F und G fallenden Gegenstände durch die Beziehung φ einander zugeordnet.

Es kann noch gefragt werden, was der Ausdruck

„jeder Gegenstand, der unter F fällt, steht in der Beziehung φ zu einem unter G fallenden Gegenstande"

bedeute, wenn gar kein Gegenstand unter F fällt. Ich verstehe darunter:

---

*) Hiermit ist der Fall nicht zu verwechseln, wo das „und" nur scheinbar die Subjecte, in Wahrheit aber zwei Sätze verbindet.

die beiden Sätze

„a fällt unter F“

und

„a steht zu keinem unter G fallenden Gegenstande in der Beziehung φ“

können nicht mit einander bestehen, was auch a bezeichne, sodass entweder der erste oder der zweite oder beide falsch sind. Hieraus geht hervor, dass „jeder Gegenstand, der unter F fällt, in der Beziehung φ zu einem unter G fallenden Gegenstande steht,“ wenn es keinen unter F fallenden Gegenstand giebt, weil dann der erste Satz

„a fällt unter F“

immer zu verneinen ist, was auch a sein mag.

Ebenso bedeutet

„zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, steht ein unter F fallender in der Beziehung φ“,

dass die beiden Sätze

„a fällt unter G“

und

„kein unter F fallender Gegenstand steht zu a in der Beziehung φ“

nicht mit einander bestehen können, was auch a sein möge.

§ 72. Wir haben nun gesehen, wann die unter die Begriffe F und G fallenden Gegenstände einander durch die Beziehung φ zugeordnet sind. Hier soll nun diese Zuordnung eine beiderseits eindeutige sein. Darunter verstehe ich, dass folgende beiden Sätze gelten:

1. wenn d in der Beziehung φ zu a steht, und wenn d in der Beziehung φ zu e steht, so ist allgemein, was auch d, a und e sein mögen, a dasselbe wie e;
2. wenn d in der Beziehung φ zu a steht, und wenn b in der Beziehung φ zu a steht, so ist allgemein, was auch d, b und a sein mögen, d dasselbe wie b.

Hiermit haben wir die beiderseits eindeutige Zuordnung

auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt und können nun so definiren:

der Ausdruck

„der Begriff F ist gleichzahlig dem Begriffe G“

sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke

„es giebt eine Beziehung φ, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter G fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuordnet“.

Ich wiederhole:

die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“

und füge hinzu:

der Ausdruck

„n ist eine Anzahl“

sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke

„es giebt einen Begriff der Art, dass n die Anzahl ist, welche ihm zukommt“.

So ist der Begriff der Anzahl erklärt, scheinbar freilich durch sich selbst, aber dennoch ohne Fehler, weil „die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt“ schon erklärt ist.

§ 73. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, gleich der Anzahl ist, welche dem Begriffe G zukommt, wenn der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig ist. Dies klingt freilich wie eine Tautologie, ist es aber nicht, da die Bedeutung des Wortes „gleichzahlig“ nicht aus der Zusammensetzung, sondern aus der eben gegebenen Erklärung hervorgeht.

Nach unserer Definition ist zu zeigen, dass der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“ derselbe ist wie der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe G“, wenn der Begriff F gleichzahlig dem Begriffe G ist. Mit andern Worten: es muss bewiesen werden, dass unter dieser Voraussetzung die Sätze allgemein gelten:

wenn der Begriff H gleichzahlig dem Begriffe F ist,

so ist er auch gleichzahlig dem Begriffe G;

und

wenn der Begriff H dem Begriffe G gleichzahlig ist, so ist er auch gleichzahlig dem Begriffe F.

Der erste Satz kommt darauf hinaus, dass es eine Beziehung giebt, welche die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet, wenn es eine Beziehung φ giebt, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet, und wenn es eine Beziehung ψ giebt, welche die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff F fallenden beiderseits eindeutig zuordnet. Folgende Anordnung der Buchstaben wird dies übersichtlicher machen:

$$H\ \psi\ F\ \varphi\ G.$$

Eine solche Beziehung kann in der That angegeben werden: sie liegt in dem Inhalte

„es giebt einen Gegenstand, zu dem c in der Beziehung ψ steht, und der zu b in der Beziehung φ steht,“

wenn wir davon c und b absondern (als Beziehungspunkte betrachten). Man kann zeigen, dass diese Beziehung eine beiderseits eindeutige ist, und dass sie die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden zuordnet.

In ähnlicher Weise kann auch der andere Satz bewiesen werden*). Diese Andeutungen werden hoffentlich genügend erkennen lassen, dass wir hierbei keinen Beweisgrund der Anschauung zu entnehmen brauchen, und dass sich mit unsern Definitionen etwas machen lässt.

§ 74. Wir können nun zu den Erklärungen der einzelnen Zahlen übergehn.

*) Desgleichen die Umkehrung: Wenn die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, dieselbe ist wie die, welche dem Begriffe G zukommt, so ist der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig.

Weil unter den Begriff „sich selbst ungleich“ nichts fällt, erkläre ich:

0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich“ zukommt.

Vielleicht nimmt man daran Anstoss, dass ich hier von einem Begriffe spreche. Man wendet vielleicht ein, dass ein Widerspruch darin enthalten sei, und erinnert an die alten Bekannten das hölzerne Eisen und den viereckigen Kreis. Nun ich meine, dass die gar nicht so schlimm sind, wie sie gemacht werden. Zwar nützlich werden sie grad nicht sein; aber schaden können sie auch nichts, wenn man nur nicht voraussetzt, dass etwas unter sie falle; und das thut man durch den blossen Gebrauch der Begriffe noch nicht. Dass ein Begriff einen Widerspruch enthalte, ist nicht immer so offensichtlich, dass es keiner Untersuchung bedürfte; dazu muss man ihn erst haben und logisch ebenso wie jeden andern behandeln. Alles was von Seiten der Logik und für die Strenge der Beweisführung von einem Begriffe verlangt werden kann, ist seine scharfe Begrenzung, dass für jeden Gegenstand bestimmt sei, ob er unter ihn falle oder nicht. Dieser Anforderung genügen nun die einen Widerspruch enthaltenden Begriffe wie „sich selbst ungleich“ durchaus; denn man weiss von jedem Gegenstande, dass er nicht unter einen solchen fällt*).

Ich brauche das Wort „Begriff“ in der Weise, dass

„a fällt unter den Begriff F“

die allgemeine Form eines beurtheilbaren Inhalts ist, der

*) Ganz davon verschieden ist die Definition eines Gegenstandes aus einem Begriffe, unter den er fällt. Der Ausdruck „der grösste ächte Bruch“ hat z. B. keinen Inhalt, weil der bestimmte Artikel den Anspruch erhebt, auf einen bestimmten Gegenstand hinzuweisen. Dagegen ist der Begriff „Bruch, der kleiner als 1 und so beschaffen ist, dass kein Bruch, der kleiner als 1 ist, ihn an Grösse übertrifft“ ganz unbedenklich, und um beweisen zu können, dass es keinen solchen Bruch gebe, braucht man sogar diesen Begriff, obgleich er einen Widerspruch enthält.

von einem Gegenstande a handelt und der beurtheilbar bleibt, was man auch für a setze. Und in diesem Sinne ist

„a fällt unter den Begriff „ „sich selbst ungleich“ “ “ gleichbedeutend mit

„a ist sich selbst ungleich“

oder

„a ist nicht gleich a“.

Ich hätte zur Definition der 0 jeden andern Begriff nehmen können, unter den nichts fällt. Es kam mir aber darauf an, einen solchen zu wählen, von dem dies rein logisch bewiesen werden kann; und dazu bietet sich am bequemsten „sich selbst ungleich“ dar, wobei ich für „gleich“ die vorhin angeführte Erklärung Leibnizens gelten lasse, die rein logisch ist.

§ 75. Es muss sich nun mittels der früheren Festsetzungen beweisen lassen, dass jeder Begriff, unter den nichts fällt, gleichzahlig mit jedem Begriffe ist, unter den nichts fällt, und nur mit einem solchen, woraus folgt, dass 0 die Anzahl ist, welche einem solchen Begriffe zukommt, und dass kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, wenn die Zahl, welche diesem zukommt, die 0 ist.

Nehmen wir an, weder unter den Begriff F noch unter den Begriff G falle ein Gegenstand, so haben wir, um die Gleichzahligkeit zu beweisen, eine Beziehung φ nöthig, von der die Sätze gelten:

> jeder Gegenstand, der unter F fällt, steht in der Beziehung φ zu einem Gegenstande, der unter G fällt; zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, steht ein unter F fallender in der Beziehung φ.

Wenn man aber durch diesen Begriff einen Gegenstand bestimmen wollte, der unter ihn fällt, wäre es allerdings nöthig, zweierlei vorher zu zeigen:

1. dass unter diesen Begriff ein Gegenstand falle;
2. dass nur ein einziger Gegenstand unter ihn falle.

Da nun schon der erste dieser Sätze falsch ist, so ist der Ausdruck „der grösste ächte Bruch“ sinnlos.

Nach dem, was früher über die Bedeutung dieser Ausdrücke gesagt ist, erfüllt bei unsern Voraussetzungen jede Beziehung diese Bedingungen, also auch die Gleichheit, die obendrein beiderseits eindeutig ist; denn es gelten die beiden oben dafür verlangten Sätze.

Wenn dagegen unter G ein Gegenstand fällt z. B. a, während unter F keiner fällt, so bestehen die beiden Sätze

„a fällt unter G“

und

„kein unter F fallender Gegenstand steht zu a in der Beziehung φ“

mit einander für jede Beziehung φ; denn der erste ist nach der ersten Voraussetzung richtig und der zweite nach der zweiten. Wenn es nämlich keinen unter F fallenden Gegenstand giebt, so giebt es auch keinen solchen, der in irgendeiner Beziehung zu a stände. Es giebt also keine Beziehung, welche nach unserer Erklärung die unter F den unter G fallenden Gegenständen zuordnete, und demnach sind die Begriffe F und G ungleichzahlig.

§ 76. Ich will nun die Beziehung erklären, in der je zwei benachbarte Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu einander stehen. Der Satz:

> „es giebt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x der Art, dass die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, n ist, und dass die Anzahl, welche dem Begriffe „„unter F fallend aber nicht gleich x““ zukommt, m ist“

sei gleichbedeutend mit

> „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.“

Ich vermeide den Ausdruck „n ist die auf m nächstfolgende Anzahl,“ weil zur Rechtfertigung des bestimmten Artikels erst zwei Sätze bewiesen werden müssten*). Aus

*) Siehe Anm. auf S. 87 u. 88.

demselben Grunde sage ich hier noch nicht „$n = m + 1$“; denn auch durch das Gleichheitszeichen wird $(m + 1)$ als Gegenstand bezeichnet.

§ 77. Um nun auf die Zahl 1 zu kommen, müssen wir zunächst zeigen, dass es etwas giebt, was in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt.

Betrachten wir den Begriff — oder, wenn man lieber will, das Prädicat — „gleich 0“! Unter diesen fällt die 0. Unter den Begriff „gleich 0 aber nicht gleich 0“ fällt dagegen kein Gegenstand, sodass 0 die Anzahl ist, welche diesem Begriffe zukommt. Wir haben demnach einen Begriff „gleich 0“ und einen unter ihn fallenden Gegenstand 0, von denen gilt:

die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt;

die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0 aber nicht gleich 0“ zukommt, ist die 0.

Also folgt nach unserer Erklärung die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt, in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0.

Wenn wir nun definiren:

1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt,

so können wir den letzten Satz so ausdrücken:

1 folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die Definition der 1 zu ihrer objectiven Rechtmässigkeit keine beobachtete Thatsache*) voraussetzt; denn man verwechselt leicht damit, dass gewisse subjective Bedingungen erfüllt sein müssen, um uns die Definition möglich zu machen, und dass uns Sinneswahrnehmungen dazu veranlassen**).

*) Satz ohne Allgemeinheit.

**) Vergl. B. Erdmann, die Axiome der Geometrie S. 164.

Dies kann immerhin zutreffen, ohne dass die abgeleiteten Sätze aufhören, a priori zu sein. Zu solchen Bedingungen gehört z. B. auch, dass Blut in hinreichender Fülle und richtiger Beschaffenheit das Gehirn durchströme — wenigstens soviel wir wissen; — aber die Wahrheit unseres letzten Satzes ist davon unabhängig; sie bleibt bestehen, auch wenn dies nicht mehr stattfindet; und selbst, wenn alle Vernunftwesen einmal gleichzeitig in einen Winterschlaf verfallen sollten, so würde sie nicht etwa so lange aufgehoben sein, sondern ganz ungestört bleiben. Die Wahrheit eines Satzes ist eben nicht sein Gedachtwerden.

§ 78. Ich lasse hier einige Sätze folgen, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind. Der Leser wird leicht übersehen, wie dies geschehen kann.

1. Wenn a in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt, so ist $a = 1$.
2. Wenn 1 die Anzahl ist, welche einem Begriffe zukommt, so giebt es einen Gegenstand, der unter den Begriff fällt.
3. Wenn 1 die Anzahl ist, welche einem Begriffe F zukommt; wenn der Gegenstand x unter den Begriff F fällt, und wenn y unter den Begriff F fällt, so ist $x = y$; d. h. x ist dasselbe wie y.
4. Wenn unter einen Begriff F ein Gegenstand fällt, und wenn allgemein daraus, dass x unter den Begriff F fällt, und dass y unter den Begriff F fällt, geschlossen werden kann, dass $x = y$ ist, so ist 1 die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt.
5. Die Beziehung von m zu n, die durch den Satz:

   „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m“

   gesetzt wird, ist eine beiderseits eindeutige.

   Hiermit ist noch nicht gesagt, dass es zu jeder Anzahl eine andere gebe, welche auf sie oder auf welche sie in der Zahlenreihe unmittelbar folge.

6. Jede Anzahl ausser der 0 folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf eine Anzahl.

§ 79. Um nun beweisen zu können, dass auf jede Anzahl (n) in der natürlichen Zahlenreihe eine Anzahl unmittelbar folge, muss man einen Begriff aufweisen, dem diese letzte Anzahl zukommt. Wir wählen als diesen

„der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend",

der zunächst erklärt werden muss.

Ich wiederhole zunächst mit etwas andern Worten die Definition, welche ich in meiner „Begriffsschrift" vom Folgen in einer Reihe gegeben habe.

Der Satz

„wenn jeder Gegenstand, zu dem x in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F fällt, und wenn daraus, dass d unter den Begriff F fällt, allgemein, was auch d sei, folgt, dass jeder Gegenstand, zu dem d in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F falle, so fällt y unter den Begriff F, was auch F für ein Begriff sein möge"

sei gleichbedeutend mit

„y folgt in der φ-Reihe auf x"

und mit

„x geht in der φ-Reihe dem y vorher."

§ 80. Einige Bemerkungen hierzu werden nicht überflüssig sein. Da die Beziehung φ unbestimmt gelassen ist, so ist die Reihe nicht nothwendig in der Form einer räumlichen und zeitlichen Anordnung zu denken, obwohl diese Fälle nicht ausgeschlossen sind.

Man könnte vielleicht eine andere Erklärung für natürlicher halten z. B.: wenn man von x ausgehend seine Aufmerksamkeit immer von einem Gegenstande zu einem andern lenkt, zu welchem er in der Beziehung φ steht, und wenn man auf diese Weise schliesslich y erreichen kann, so sagt man y folge in der φ-Reihe auf x.

Dies ist eine Weise die Sache zu untersuchen, keine Definition. Ob wir bei der Wanderung unserer Aufmerksamkeit y erreichen, kann von mancherlei subjectiven Nebenumständen abhangen z. B. von der uns zu Gebote stehenden Zeit, oder von unserer Kenntniss der Dinge. Ob y auf x in der φ-Reihe folgt, hat im Allgemeinen gar nichts mit unserer Aufmerksamkeit und den Bedingungen ihrer Fortbewegung zu thun, sondern ist etwas Sachliches, ebenso wie ein grünes Blatt gewisse Lichtstrahlen reflectirt, mögen sie nun in mein Auge fallen und Empfindung hervorrufen oder nicht, ebenso wie ein Salzkorn in Wasser löslich ist, mag ich es ins Wasser werfen und den Vorgang beobachten oder nicht, und wie es selbst dann noch löslich ist, wenn ich gar nicht die Möglichkeit habe, einen Versuch damit anzustellen.

Durch meine Erklärung ist die Sache aus dem Bereiche subjectiver Möglichkeiten in das der objectiven Bestimmtheit erhoben. In der That: dass aus gewissen Sätzen ein anderer folgt, ist etwas Objectives, von den Gesetzen der Bewegung unserer Aufmerksamkeit Unabhängiges, und es ist dafür einerlei, ob wir den Schluss wirklich machen oder nicht. Hier haben wir ein Merkmal, das die Frage überall entscheidet, wo sie gestellt werden kann, mögen wir auch im einzelnen Falle durch äussere Schwierigkeiten verhindert sein, zu beurtheilen, ob es zutrifft. Das ist für die Sache selbst gleichgiltig.

Wir brauchen nicht immer alle Zwischenglieder vom Anfangsgliede bis zu einem Gegenstande zu durchlaufen, um gewiss zu sein, dass er auf jenes folgt. Wenn z. B. gegeben ist, dass in der φ-Reihe b auf a und c auf b folgt, so können wir nach unserer Erklärung schliessen, dass c auf a folgt, ohne die Zwischenglieder auch nur zu kennen.

Durch diese Definition des Folgens in einer Reihe wird es allein möglich, die Schlussweise von n auf $(n + 1)$, welche scheinbar der Mathematik eigenthümlich ist, auf die allgemeinen logischen Gesetze zurückzuführen.

§ 81. Wenn wir nun als Beziehung φ diejenige haben, in welche m zu n gesetzt wird durch den Satz

„n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m,“

so sagen wir statt „φ-Reihe“ „natürliche Zahlenreihe“.

Ich definire weiter:

der Satz

„y folgt in der φ-Reihe auf x oder y ist dasselbe wie x“

sei gleichbedeutend mit

„y gehört der mit x anfangenden φ-Reihe an“

und mit

„x gehört der mit y endenden φ-Reihe an“.

Demnach gehört a der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe an, wenn n entweder in der natürlichen Zahlenreihe auf a folgt oder gleich a ist*).

§ 82. Es ist nun zu zeigen, dass — unter einer noch anzugebenden Bedingung — die Anzahl, welche dem Begriffe

„der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“

zukommt, auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folgt. Und damit ist dann bewiesen, dass es eine Anzahl giebt, welche auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folgt, dass es kein letztes Glied dieser Reihe giebt. Offenbar kann dieser Satz auf empirischen Wege oder durch Induction nicht begründet werden.

Es würde hier zu weit führen, den Beweis selbst zu geben. Nur sein Gang mag kurz angedeutet werden. Es ist zu beweisen

1. wenn a in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf d folgt, und wenn von d gilt:

*) Wenn n keine Anzahl ist, so gehört nur n selbst der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe an. Man stosse sich nicht an dem Ausdrucke!

die Anzahl, welche dem Begriffe
„der mit d endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“
zukommt, folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf d,

so gilt auch von a:

die Anzahl, welche dem Begriffe
„der mit a endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“
zukommt, folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf a.

Es ist zweitens zu beweisen, dass von der 0 das gilt, was in den eben ausgesprochenen Sätzen von d und von a ausgesagt ist, und dann zu folgern, dass es auch von n gilt, wenn n der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe angehört. Diese Schlussweise ist eine Anwendung der Definition, die ich von dem Ausdrucke

„y folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf x“

gegeben habe, indem man als Begriff F jene gemeinsame Aussage von d und von a, von 0 und von n zu nehmen hat.

§ 83. Um den Satz (1) des vorigen § zu beweisen, müssen wir zeigen, dass a die Anzahl ist, welche dem Begriffe „der mit a endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend, aber nicht gleich a“ zukommt. Und dazu ist wieder zu beweisen, dass dieser Begriff gleichen Umfanges mit dem Begriffe „der mit d endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“ ist. Hierfür bedarf man des Satzes, dass kein Gegenstand, welcher der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe angehört, auf sich selbst in der natürlichen Zahlenreihe folgen kann. Dies muss ebenfalls mittels unserer Definition des Folgens in einer Reihe, wie oben angedeutet ist, bewiesen werden*).

*) E. Schröder scheint a. a. O. S. 63 diesen Satz als Folge einer auch anders denkbaren Bezeichnungsweise anzusehen. Es macht sich auch hier der Uebelstand bemerkbar, der seine ganze Darstellung dieser

Wir werden hierdurch genöthigt, dem Satze, dass die Anzahl, welche dem Begriffe

„der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend"

zukommt, in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf n folgt, die Bedingung hinzuzufügen, dass n der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe angehöre. Hierfür ist eine kürzere Ausdrucksweise gebräuchlich, die ich nun erkläre: der Satz

„n gehört der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe an"

sei gleichbedeutend mit

„n ist eine endliche Anzahl".

Dann können wir den letzten Satz so ausdrücken: keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber.

Unendliche Anzahlen.

§ 84. Den endlichen gegenüber stehen die unendlichen Anzahlen. Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl" zukommt, ist eine unendliche. Bezeichnen wir sie etwa durch ∞_1! Wäre sie eine endliche, so könnte sie nicht auf sich selber in der natürlichen Zahlenreihe folgen. Man kann aber zeigen, dass ∞_1 das thut.

In der so erklärten unendlichen Anzahl ∞_1 liegt nichts irgendwie Geheimnissvolles oder Wunderbares. „Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist ∞_1" heisst nun nichts mehr und nichts weniger als: es giebt eine Beziehung, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den endlichen

---

Sache beeinträchtigt, dass man nicht recht weiss, ob die Zahl ein Zeichen ist, und was dann dessen Bedeutung, oder ob sie eben diese Bedeutung ist. Daraus, dass man verschiedene Zeichen festsetzt, sodass nie dasselbe wiederkehrt, folgt noch nicht, dass diese Zeichen auch Verschiedenes bedeuten.

Anzahlen beiderseits eindeutig zuordnet. Dies ist nach unseren Erklärungen ein ganz klarer und unzweideutiger Sinn; und das genügt, um den Gebrauch des Zeichens ∞_1 zu rechtfertigen und ihm eine Bedeutung zu sichern. Dass wir uns keine Vorstellung von einer unendlichen Anzahl bilden können, ist ganz unerheblich und würde endliche Anzahlen ebenso treffen. Unsere Anzahl ∞_1 hat auf diese Weise etwas ebenso Bestimmtes wie irgendeine endliche: sie ist zweifellos als dieselbe wiederzuerkennen und von einer andern zu unterscheiden.

§ 85. Vor Kurzem hat G. Cantor in einer bemerkenswerthen Schrift*) unendliche Anzahlen eingeführt. Ich stimme ihm durchaus in der Würdigung der Ansicht bei, welche überhaupt nur die endlichen Anzahlen als wirklich gelten lassen will. Sinnlich wahrnehmbar und räumlich sind weder diese noch die Brüche, noch die negativen, irrationalen und complexen Zahlen; und wenn man wirklich nennt, was auf die Sinne wirkt, oder was wenigstens Wirkungen hat, die Sinneswahrnehmungen zur nähern oder entferntern Folge haben können, so ist freilich keine dieser Zahlen wirklich. Aber wir brauchen auch solche Wahrnehmungen gar nicht als Beweisgründe für unsere Lehrsätze. Einen Namen oder ein Zeichen, das logisch einwurfsfrei eingeführt ist, können wir in unsern Untersuchungen ohne Scheu gebrauchen, und so ist unsere Anzahl ∞_1 so gerechtfertigt wie die Zwei oder die Drei.

Indem ich hierin, wie ich glaube, mit Cantor übereinstimme, weiche ich doch in der Benennung etwas von ihm ab. Meine Anzahl nennt er „Mächtigkeit," während sein Begriff**) der Anzahl auf die Anordnung Bezug nimmt. Für

*) Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

**) Dieser Ausdruck kann der früher hervorgehobenen Objectivität des Begriffes zu widersprechen scheinen; aber subjectiv ist hier nur die Benennung.

endliche Anzahlen ergiebt sich freilich doch eine Unabhängigkeit von der Reihenfolge, dagegen nicht für unendlichgrosse. Nun enthält der Sprachgebrauch des Wortes „Anzahl“ und der Frage „wieviele?“ keine Hinweisung auf eine bestimmte Anordnung. Cantors Anzahl antwortet vielmehr auf die Frage: „das wievielste Glied in der Succession ist das Endglied?“ Darum scheint mir meine Benennung besser mit dem Sprachgebrauche übereinzustimmen. Wenn man die Bedeutung eines Wortes erweitert, so wird man darauf zu achten haben, dass möglichst viele allgemeine Sätze ihre Geltung behalten und zumal so grundlegende, wie für die Anzahl die Unabhängigkeit von der Reihenfolge ist. Wir haben gar keine Erweiterung nöthig gehabt, weil unser Begriff der Anzahl sofort auch unendliche Zahlen umfasst.

§ 86. Um seine unendlichen Anzahlen zu gewinnen, führt Cantor den Beziehungsbegriff des Folgens in einer Succession ein, der von meinem „Folgen in einer Reihe“ abweicht. Nach ihm würde z. B. eine Succession entstehen, wenn man die endlichen positiven ganzen Zahlen so anordnete, dass die unpaaren in ihrer natürlichen Reihenfolge für sich und ebenso die paaren unter sich auf einander folgten, ferner festgesetzt wäre, dass jede paare auf jede unpaare folgen solle. In dieser Succession würde z. B. 0 auf 13 folgen. Es würde aber keine Zahl unmittelbar der 0 vorhergehen. Dies ist nun ein Fall, der in dem von mir definirten Folgen in der Reihe nicht vorkommen kann. Man kann streng beweisen, ohne ein Axiom der Anschauung zu benutzen, dass wenn y auf x in der φ-Reihe folgt, es einen Gegenstand giebt, der in dieser Reihe dem y unmittelbar vorhergeht. Mir scheinen nun genaue Definitionen des Folgens in der Succession und der cantorschen Anzahl noch zu fehlen. So beruft sich Cantor auf die etwas geheimnissvolle „innere Anschauung,“ wo ein Beweis aus Definitionen anzustreben und wohl auch möglich wäre. Denn ich glaube vorauszusehen, wie sich jene Begriffe bestimmen liessen. Jedenfalls

will ich durch diese Bemerkungen, deren Berechtigung und Fruchtbarkeit durchaus nicht angreifen. Im Gegentheil begrüsse ich in diesen Untersuchungen eine Erweiterung der Wissenschaft besonders deshalb, weil durch sie ein rein arithmetischer Weg zu höhern unendlichgrossen Anzahlen (Mächtigkeiten) gebahnt ist.

V. Schluss.

§ 87. Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht zu haben, dass die arithmetischen Gesetze analytische Urtheile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein. Die Anwendungen der Arithmetik zur Naturerklärung wären logische Bearbeitungen von beobachteten Thatsachen*); Rechnen wäre Schlussfolgern. Die Zahlgesetze werden nicht, wie Baumann**) meint, eine praktische Bewährung nöthig haben, um in der Aussenwelt anwendbar zu sein; denn in der Aussenwelt, der Gesammtheit des Räumlichen, giebt es keine Begriffe, keine Eigenschaften der Begriffe, keine Zahlen. Also sind die Zahlgesetze nicht eigentlich auf die äussern Dinge anwendbar: sie sind nicht Naturgesetze. Wohl aber sind sie anwendbar auf Urtheile, die von Dingen der Aussenwelt gelten: sie sind Gesetze der Naturgesetze. Sie behaupten nicht einen Zusammenhang zwischen Naturerscheinungen, sondern einen solchen zwischen Urtheilen; und zu diesen gehören auch die Naturgesetze.

§ 88. Kant***) hat den Werth der analytischen Urtheile offenbar — wohl in Folge einer zu engen Begriffsbestimmung — unterschätzt, obgleich ihm der hier benutzte weitere Begriff

*) Das Beobachten schliesst selbst schon eine logische Thätigkeit ein.
**) A. a. O. Bd. II. S. 670.
***) A. a. O. III. S. 39 u. ff.

vorgeschwebt zu haben scheint*). Wenn man seine Definition zu Grunde legt, ist die Eintheilung in analytische und synthetische Urtheile nicht erschöpfend. Er denkt an den Fall des allgemein bejahenden Urtheils. Dann kann man von einem Subjectsbegriffe reden und fragen, ob der Prädicatsbegriff in ihm — zufolge der Definition — enthalten sei. Wie aber, wenn das Subject ein einzelner Gegenstand ist? wie, wenn es sich um ein Existentialurtheil handelt? Dann kann in diesem Sinne gar nicht von einem Subjectsbegriffe die Rede sein. Kant scheint den Begriff durch beigeordnete Merkmale bestimmt zu denken; das ist aber eine der am wenigsten fruchtbaren Begriffsbildungen. Wenn man die oben gegebenen Definitionen überblickt, so wird man kaum eine von der Art finden. Dasselbe gilt auch von den wirklich fruchtbaren Definitionen in der Mathematik z. B. der Stetigkeit einer Function. Wir haben da nicht eine Reihe beigeordneter Merkmale, sondern eine innigere, ich möchte sagen organischere Verbindung der Bestimmungen. Man kann sich den Unterschied durch ein geometrisches Bild anschaulich machen. Wenn man die Begriffe (oder ihre Umfänge) durch Bezirke einer Ebene darstellt, so entspricht dem durch beigeordnete Merkmale definirten Begriffe der Bezirk, welcher allen Bezirken der Merkmale gemeinsam ist; er wird durch Theile von deren Begrenzungen umschlossen. Bei einer solchen Definition handelt es sich also — im Bilde zu sprechen — darum, die schon gegebenen Linien in neuer Weise zur Abgrenzung eines Bezirks zu verwenden**). Aber dabei kommt nichts wesentlich Neues zum Vorschein. Die fruchtbareren Begriffsbestimmungen ziehen Grenzlinien, die noch gar nicht gegeben waren. Was sich aus ihnen schliessen lasse, ist nicht von vornherein zu übersehen; man holt dabei

*) S. 43 sagt er, dass ein synthetischer Satz nur dann nach dem Satze des Widerspruchs eingesehen werden kann, wenn ein andrer synthetischer Satz vorausgesetzt wird.

**) Ebenso, wenn die Merkmale durch „oder" verbunden sind.

nicht einfach aus dem Kasten wieder heraus, was man hineingelegt hatte. Diese Folgerungen erweitern unsere Kenntnisse, und man sollte sie daher Kant zufolge für synthetisch halten; dennoch können sie rein logisch bewiesen werden und sind also analytisch. Sie sind in der That in den Definitionen enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause. Oft braucht man mehre Definitionen zum Beweise eines Satzes, der folglich in keiner einzelnen enthalten ist und doch aus allen zusammen rein logisch folgt.

§ 89. Ich muss auch der Allgemeinheit der Behauptung Kants*) widersprechen: ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden. Die Null, die Eins sind Gegenstände, die uns nicht sinnlich gegeben werden können. Auch Diejenigen, welche die kleineren Zahlen für anschaulich halten, werden doch einräumen müssen, dass ihnen keine der Zahlen, die grösser als 1000 ($^{1000}{}^{1000}$) sind, anschaulich gegeben werden können, und dass wir dennoch Mancherlei von ihnen wissen. Vielleicht hat Kant das Wort „Gegenstand" in etwas anderm Sinne gebraucht; aber dann fallen die Null, die Eins, unser ∞_1 ganz aus seiner Betrachtung heraus; denn Begriffe sind sie auch nicht, und auch von Begriffen verlangt Kant*), dass man ihnen den Gegenstand in der Anschauung beifüge.

Um nicht den Vorwurf einer kleinlichen Tadelsucht gegenüber einem Geiste auf mich zu laden, zu dem wir nur mit dankbarer Bewunderung aufblicken können, glaube ich auch die Uebereinstimmung hervorheben zu müssen, welche weit überwiegt. Um nur das hier zunächst Liegende zu berühren, sehe ich ein grosses Verdienst Kants darin, dass er die Unterscheidung von synthetischen und analytischen Urtheilen gemacht hat. Indem er die geometrischen Wahrheiten synthetisch und a priori nannte, hat er ihr wahres

*) A. a. O. III, S. 82.

Wesen enthüllt. Und dies ist noch jetzt werth wiederholt zu werden, weil es noch oft verkannt wird. Wenn Kant sich hinsichtlich der Arithmetik geirrt hat, so thut das, glaube ich, seinem Verdienste keinen wesentlichen Eintrag. Ihm kam es darauf an, dass es synthetische Urtheile a priori giebt; ob sie nur in der Geometrie oder auch in der Arithmetik vorkommen, ist von geringerer Bedeutung.

§ 90. Ich erhebe nicht den Anspruch, die analytische Natur der arithmetischen Sätze mehr als wahrscheinlich gemacht zu haben, weil man immer noch zweifeln kann, ob ihr Beweis ganz aus rein logischen Gesetzen geführt werden könne, ob sich nicht irgendwo ein Beweisgrund andrer Art unvermerkt einmische. Dies Bedenken wird auch durch die Andeutungen nicht vollständig entkräftet, die ich für den Beweis einiger Sätze gegeben habe; es kann nur durch eine lückenlose Schlusskette gehoben werden, sodass kein Schritt geschieht, der nicht einer von wenigen als rein logisch anerkannten Schlussweisen gemäss ist. So ist bis jetzt kaum ein Beweis geführt worden, weil der Mathematiker zufrieden ist, wenn jeder Uebergang zu einem neuen Urtheile als richtig einleuchtet, ohne nach der Natur dieses Einleuchtens zu fragen, ob es logisch oder anschaulich sei. Ein solcher Fortschritt ist oft sehr zusammengesetzt und mehren einfachen Schlüssen gleichwerthig, neben welchen noch aus der Anschauung etwas einfliessen kann. Man geht sprungweise vor, und daraus entsteht die scheinbar überreiche Mannichfaltigkeit der Schlussweisen in der Mathematik; denn je grösser die Sprünge sind, desto vielfachere Combinationen aus einfachen Schlüssen und Anschauungsaxiomen können sie vertreten. Dennoch leuchtet uns ein solcher Uebergang oft unmittelbar ein, ohne dass uns die Zwischenstufen zum Bewusstsein kommen, und da er sich nicht als eine der anerkannten logischen Schlussweisen darstellt, sind wir sogleich bereit, dies Einleuchten für ein anschauliches und die erschlossene Wahrheit für eine synthetische zu halten, auch

dann, wenn der Geltungsbereich offenbar über das Anschauliche hinausreicht.

Auf diesem Wege ist es nicht möglich, das auf Anschauung beruhende Synthetische von dem Analytischen rein zu scheiden. Es gelingt so auch nicht, die Axiome der Anschauung mit Sicherheit vollständig zusammenzustellen, sodass jeder mathematische Beweis allein aus diesen Axiomen nach den logischen Gesetzen geführt werden kann.

§ 91. Die Forderung ist also unabweisbar, alle Sprünge in der Schlussfolgerung zu vermeiden. Dass ihr so schwer zu genügen ist, liegt an der Langwierigkeit eines schrittweisen Vorgehens. Jeder nur etwas verwickeltere Beweis droht eine ungeheuerliche Länge anzunehmen. Dazu kommt, dass die übergrosse Mannichfaltigkeit der in der Sprache ausgeprägten logischen Formen es erschwert, einen Kreis von Schlussweisen abzugrenzen, der für alle Fälle genügt und leicht zu übersehen ist.

Um diese Uebelstände zu vermindern, habe ich meine Begriffsschrift erdacht. Sie soll grössere Kürze und Uebersichtlichkeit des Ausdrucks erzielen und sich in wenigen festen Formen nach Art einer Rechnung bewegen, sodass kein Uebergang gestattet wird, der nicht den ein für alle Mal aufgestellten Regeln gemäss ist*). Es kann sich dann kein Beweisgrund unbemerkt einschleichen. Ich habe so, ohne der Anschauung ein Axiom zu entlehnen, einen Satz bewiesen**), den man beim ersten Blick für einen synthetischen halten möchte, welchen ich hier so aussprechen will:

Wenn die Beziehung jedes Gliedes einer Reihe zum nächstfolgenden eindeutig ist, und wenn m und y in dieser Reihe auf x folgen, so geht y dem m in dieser Reihe vorher oder fällt mit ihm zusammen oder folgt auf m.

---

*) Sie soll jedoch nicht nur die logische Form wie die boolesche Bezeichnungsweise, sondern auch einen Inhalt auszudrücken im Stande sein.

**) Begriffsschrift, Halle a/S. 1879, S. 86, Formel 133.

Aus diesem Beweise kann man ersehen, dass Sätze, welche unsere Kenntnisse erweitern, analytische Urtheile enthalten können*).

Andere Zahlen.

§ 92. Wir haben unsere Betrachtung bisher auf die Anzahlen beschränkt. Werfen wir nun noch einen Blick auf die andern Zahlengattungen und versuchen wir für dies weitere Feld nutzbar zu machen, was wir auf dem engern erkannt haben!

Um den Sinn der Frage nach der Möglichkeit einer gewissen Zahl klar zu machen, sagt Hankel**):

„Ein Ding, eine Substanz, die selbständig ausserhalb des denkenden Subjects und der sie veranlassenden Objecte existirte, ein selbständiges Princip, wie etwa bei den Pythagoräern, ist die Zahl heute nicht mehr. Die Frage von der Existenz kann daher nur auf das denkende Subject oder die gedachten Objecte, deren Beziehungen die Zahlen darstellen, bezogen werden. Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden können, bedarf keines Beweises. Sind aber die betreffenden Zahlen logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definirt und also

---

*) Diesen Beweis wird man immer noch viel zu weitläufig finden, ein Nachtheil, der vielleicht die fast unbedingte Sicherheit vor einem Fehler oder einer Lücke mehr als aufzuwiegen scheint. Mein Zweck war damals Alles auf die möglichst geringe Zahl von möglichst einfachen logischen Gesetzen zurückzuführen. Infolge dessen wendete ich nur eine einzige Schlussweise an. Ich wies aber schon damals im Vorworte S. VII darauf hin, dass für die weitere Anwendung es sich empfehlen würde, mehr Schlussweisen zuzulassen. Dies kann geschehen ohne der Bündigkeit der Schlusskette zu schaden, und so lässt sich eine bedeutende Abkürzung erreichen.

**) A. a. O. S. 6 u. 7.

ohne Widerspruch, so kann jene Frage nur darauf hinauskommen, ob es im Gebiete des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen, des Actuellen ein Substrat derselben, ob es Objecte gebe, an welchen die Zahlen, also die intellectuellen Beziehungen der bestimmten Art zur Erscheinung kommen".

§ 93. Bei dem ersten Satze kann man zweifeln, ob nach Hankel die Zahlen in dem denkenden Subjecte oder in den sie veranlassenden Objecten oder in beiden existiren. Im räumlichen Sinne sind sie jedenfalls weder innerhalb noch ausserhalb weder des Subjects noch eines Objects. Wohl aber sind sie in dem Sinne ausserhalb des Subjects, dass sie nicht subjectiv sind. Während jeder nur seinen Schmerz, seine Lust, seinen Hunger fühlen, seine Ton- und Farbenempfindungen haben kann, können die Zahlen gemeinsame Gegenstände für Viele sein, und zwar sind sie für Alle genau dieselben, nicht nur mehr oder minder ähnliche innere Zustände von Verschiedenen. Wenn Hankel die Frage von der Existenz auf das denkende Subject beziehen will, so scheint er sie damit zu einer psychologischen zu machen, was sie in keiner Weise ist. Die Mathematik beschäftigt sich nicht mit der Natur unserer Seele, und wie irgendwelche psychologische Fragen beantwortet werden, muss für sie völlig gleichgiltig sein.

§ 94. Auch dass dem Mathematiker nur, was sich selbst widerspricht, als unmöglich gelte, muss beanstandet werden. Ein Begriff ist zulässig, auch wenn seine Merkmale einen Widerspruch enthalten; man darf nur nicht voraussetzen, dass etwas unter ihn falle. Aber daraus, dass der Begriff keinen Widerspruch enthält, kann noch nicht geschlossen werden, dass etwas unter ihn falle. Wie soll man übrigens beweisen, dass ein Begriff keinen Widerspruch enthalte? Auf der Hand liegt das keineswegs immer; daraus, dass man keinen Widerspruch sieht, folgt nicht, dass keiner da ist, und die Bestimmtheit der Definition leistet keine

Gewähr dafür. Hankel beweist*), dass ein höheres begrenztes complexes Zahlensystem als das gemeine, das allen Gesetzen der Addition und Multiplication unterworfen wäre, einen Widerspruch enthält. Das muss eben bewiesen werden; man sieht es nicht sogleich. Bevor dies geschehen, könnte immerhin jemand unter Benutzung eines solchen Zahlensystems zu wunderbaren Ergebnissen gelangen, deren Begründung nicht schlechter wäre, als die, welche Hankel**) von den Determinantensätzen mittels der alternirenden Zahlen giebt; denn wer bürgt dafür, dass nicht auch in deren Begriffe ein versteckter Widerspruch enthalten ist? Und selbst, wenn man einen solchen allgemein für beliebig viele alternirende Einheiten ausschliessen könnte, würde immer noch nicht folgen, dass es solche Einheiten gebe. Und grade dies brauchen wir. Nehmen wir als Beispiel den 18. Satz des 1. Buches von Euklids Elementen:

In jedem Dreiecke liegt der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber.

Um das zu beweisen, trägt Euklid auf der grössern Seite AC ein Stück AD gleich der kleinern Seite AB ab und beruft sich dabei auf eine frühere Construction. Der Beweis würde in sich zusammenfallen, wenn es einen solchen Punkt nicht gäbe, und es genügt nicht, dass man in dem Begriffe „Punkt auf AC, dessen Entfernung von A gleich B ist" keinen Widerspruch entdeckt. Es wird nun B mit D verbunden. Auch dass es eine solche Gerade giebt, ist ein Satz, auf den sich der Beweis stützt.

§ 95. Streng kann die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes wohl nur durch den Nachweis dargelegt werden, dass etwas unter ihn falle. Das Umgekehrte würde ein Fehler sein. In diesen verfällt Hankel, wenn er in Bezug auf die Gleichung $x + b = c$ sagt***):

*) A. a. O. S. 106 u. 107.

**) A. a. O. § 35.

***) A. a. O. S. 5. Aehnlich E. Kossak, a. a. O. S. 17 unten.

„Es liegt auf der Hand, dass es, wenn b $\not>$ c ist, keine Zahl x in der Reihe 1, 2, 3, ... giebt, welche die betreffende Aufgabe löst: die Subtraction ist dann unmöglich. Nichts hindert uns jedoch, dass wir in diesem Falle die Differenz (c—b) als ein Zeichen ansehen, welches die Aufgabe löst, und mit welchem genau so zu operiren ist, als wenn es eine numerische Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, ... wäre."

Uns hindert allerdings etwas (2—3), ohne Weiteres als Zeichen anzusehen, welches die Aufgabe löst; denn ein leeres Zeichen löst eben die Aufgabe nicht; ohne einen Inhalt ist es nur Tinte oder Druckerschwärze auf Papier, hat als solche physikalische Eigenschaften, aber nicht die, um 3 vermehrt 2 zu geben. Es wäre eigentlich gar kein Zeichen, und sein Gebrauch als solches wäre ein logischer Fehler. Auch in dem Falle, wo c $\not>$ b, ist nicht das Zeichen („c—b") die Lösung der Aufgabe, sondern dessen Inhalt.

§ 96. Ebensogut könnte man sagen: unter den bisher bekannten Zahlen giebt es keine, welche die beiden Gleichungen

$$x + 1 = 2 \text{ und } x + 2 = 1$$

zugleich befriedigt; aber nichts hindert uns ein Zeichen einzuführen, das die Aufgabe löst. Man wird sagen: die Aufgabe enthält ja einen Widerspruch. Freilich, wenn man als Lösung eine reelle oder gemeine complexe Zahl verlangt; aber erweitern wir doch unser Zahlsystem, schaffen wir doch Zahlen, die den Anforderungen genügen! Warten wir ab, ob uns jemand einen Widerspruch nachweist! Wer kann wissen, was bei diesen neuen Zahlen möglich ist? Die Eindeutigkeit der Subtraction werden wir dann freilich nicht aufrecht erhalten können; aber wir müssen ja auch die Eindeutigkeit des Wurzelziehens aufgeben, wenn wir die negativen Zahlen einführen wollen; durch die complexen Zahlen wird das Logarithmiren vieldeutig.

Schaffen wir auch Zahlen, welche divergirende Reihen zu summiren gestatten! Nein! auch der Mathematiker kann

nicht beliebig etwas schaffen, so wenig wie der Geograph; auch er kann nur entdecken, was da ist, und es benennen.

An diesem Irrthum krankt die formale Theorie der Brüche, der negativen, der complexen Zahlen*). Man stellt die Forderung, dass die bekannten Rechnungsregeln für die neu einzuführenden Zahlen möglichst erhalten bleiben, und leitet daraus allgemeine Eigenschaften und Beziehungen ab. Stösst man nirgends auf einen Widerspruch, so hält man die Einführung der neuen Zahlen für gerechtfertigt, als ob ein Widerspruch nicht dennoch irgendwo versteckt sein könnte, und als ob Widerspruchslosigkeit schon Existenz wäre.

§ 97. Dass dieser Fehler so leicht begangen wird, liegt wohl an einer mangelhaften Unterscheidung der Begriffe von den Gegenständen. Nichts hindert uns, den Begriff „Quadratwurzel aus -1“ zu gebrauchen; aber wir sind nicht ohne Weiteres berechtigt, den bestimmten Artikel davor zu setzen und den Ausdruck „die Quadratwurzel aus -1“ als einen sinnvollen anzusehen. Wir können unter der Voraussetzung, dass $i^2 = -1$ sei, die Formel beweisen, durch welche der Sinus eines Vielfachen des Winkels α durch Sinus und Cosinus von α selbst ausgedrückt wird; aber wir dürfen nicht vergessen, dass der Satz dann die Bedingung $i^2 = -1$ mit sich führt, welche wir nicht ohne Weiteres weglassen dürfen. Gäbe es gar nichts, dessen Quadrat -1 wäre, so brauchte die Gleichung kraft unseres Beweises nicht richtig zu sein**), weil die Bedingung $i^2 = -1$ niemals erfüllt wäre, von der ihre Geltung abhängig erscheint. Es wäre so, als ob wir in einem geometrischen Beweise eine Hilfslinie benutzt hätten, die gar nicht gezogen werden kann.

§ 98. Hankel***) führt zwei Arten von Operationen ein, die er lytische und thetische nennt, und die er durch

*) Aehnlich steht es bei Cantors unendlichen Anzahlen.

**) Auf einem andern Wege möchte sie immerhin streng bewiesen werden können.

***) A. a. O. S. 18.

gewisse Eigenschaften bestimmt, welche diese Operationen haben sollen. Dagegen ist nichts zu sagen, so lange man nur nicht voraussetzt, dass es solche Operationen und Gegenstände giebt, welche deren Ergebnisse sein können*). Später**) bezeichnet er eine thetische, vollkommen eindeutige, associative Operation durch (a + b) und die entsprechende ebenfalls vollkommen eindeutige lytische durch (a — b). Eine solche Operation? welche? eine beliebige? dann ist dies keine Definition von (a + b); und wenn es nun keine giebt? Wenn das Wort „Addition" noch keine Bedeutung hätte, wäre es logisch zulässig zu sagen: eine solche Operation wollen wir eine Addition nennen; aber man darf nicht sagen: eine solche Operation soll die Addition heissen und durch (a + b) bezeichnet werden, bevor es feststeht, dass es eine und nur eine einzige giebt. Man darf nicht auf der einen Seite einer Definitionsgleichung den unbestimmten und auf der andern den bestimmten Artikel gebrauchen. Dann sagt Hankel ohne Weiteres: „der Modul der Operation", ohne bewiesen zu haben, dass es einen und nur einen giebt.

§ 99. Kurz diese rein formale Theorie ist unzureichend. Das Werthvolle an ihr ist nur dies. Man beweist, dass wenn Operationen gewisse Eigenschaften wie die Associativität und die Commutativität haben, gewisse Sätze von ihnen gelten. Man zeigt nun, dass die Addition und Multiplication, welche man schon kennt, diese Eigenschaften haben, und kann nun sofort jene Sätze von ihnen aussprechen, ohne den Beweis in jedem einzelnen Falle weitläufig zu wiederholen. Erst durch diese Anwendung auf anderweitig gegebene Operationen, gelangt man zu den bekannten Sätzen der Arithmetik. Keineswegs darf man aber glauben die Addition und die Multiplication auf diesem Wege einführen zu können.

---

*) Das thut Hankel eigentlich schon durch den Gebrauch der Gleichung θ (c, b) = a.

**) A. a. O. S. 29.

Man giebt nur eine Anleitung für die Definitionen, nicht diese selbst. Man sagt: der Name „Addition“ soll nur einer thetischen, vollkommen eindeutigen, associativen Operation gegeben werden, womit diejenige, welche nun so heissen soll, noch gar nicht angegeben ist. Danach stände nichts im Wege, die Multiplication Addition zu nennen und durch (a + b) zu bezeichnen, und niemand könnte mit Bestimmtheit sagen, ob 2 + 3 5 oder 6 wäre.

§ 100. Wenn wir diese rein formale Betrachtungsweise aufgeben, so kann sich aus dem Umstande, dass gleichzeitig mit der Einführung von neuen Zahlen die Bedeutung der Wörter „Summe“ und „Product“ erweitert wird, ein Weg darzubieten scheinen. Man nimmt einen Gegenstand, etwa den Mond, und erklärt: der Mond mit sich selbst multiplicirt sei − 1. Dann haben wir in dem Monde eine Quadratwurzel aus − 1. Diese Erklärung scheint gestattet, weil aus der bisherigen Bedeutung der Multiplication der Sinn eines solchen Products noch gar nicht hervorgeht und also bei der Erweiterung dieser Bedeutung beliebig festgesetzt werden kann. Aber wir brauchen auch die Producte einer reellen Zahl mit der Quadratwurzel aus − 1. Wählen wir deshalb lieber den Zeitraum einer Secunde zu einer Quadratwurzel aus − 1 und bezeichnen ihn durch i! Dann werden wir unter 3 i den Zeitraum von 3 Secunden verstehen u. s. w.*) Welchen Gegenstand werden wir dann etwa durch 2 + 3 i bezeichnen? Welche Bedeutung würde dem Pluszeichen in diesem Falle zu geben sein? Nun das muss

*) Mit demselben Rechte könnten wir auch ein gewisses Electricitätsquantum, einen gewissen Flächeninhalt u. s. w. zu Quadratwurzeln aus − 1 wählen, müssten diese verschiedenen Wurzeln dann auch selbstverständlich verschieden bezeichnen. Dass man so beliebig viele Quadratwurzeln aus − 1 scheinbar schaffen kann, wird weniger verwunderlich, wenn man bedenkt, dass die Bedeutung der Quadratwurzel nicht schon vor diesen Festsetzungen unveränderlich feststand, sondern durch sie erst mitbestimmt wird.

allgemein festgesetzt werden, was freilich nicht leicht sein wird. Doch nehmen wir einmal an, dass wir allen Zeichen von der Form $a + bi$ einen Sinn gesichert hätten, und zwar einen solchen, dass die bekannten Additionssätze gelten! Dann müssten wir ferner festsetzen, dass allgemein

$$(a + bi)\,(c + di) = ac - bd + i\,(ad + bc)$$

sein solle, wodurch wir die Multiplication weiter bestimmen würden.

§ 101. Nun könnten wir die Formel für $\cos(n\alpha)$ beweisen, wenn wir wüssten, dass aus der Gleichheit complexer Zahlen die Gleichheit der reellen Theile folgt. Das müsste aus dem Sinne von $a + bi$ hervorgehn, den wir hier als vorhanden angenommen haben. Der Beweis würde nur für den Sinn der complexen Zahlen, ihrer Summen und Producte gelten, den wir festgesetzt haben. Da nun für ganzes reelles n und reelles α i gar nicht mehr in der Gleichung vorkommt, so ist man versucht zu schliessen: also ist es ganz gleichgiltig, ob i eine Secunde, ein Millimeter oder was sonst bedeutet, wenn nur unsere Additions- und Multiplicationssätze gelten; auf die allein kommt es an; um das Uebrige brauchen wir uns nicht zu kümmern. Vielleicht kann man die Bedeutung von $a + bi$, von Summe und Product in verschiedener Weise so festsetzen, dass jene Sätze bestehen bleiben; aber es ist nicht gleichgiltig, ob man überhaupt einen solchen Sinn für diese Ausdrücke finden kann.

§ 102. Man thut oft so, als ob die blosse Forderung schon ihre Erfüllung wäre. Man fordert, dass die Subtraction*), die Division, die Radicirung immer ausführbar seien, und glaubt damit genug gethan zu haben. Warum fordert man nicht auch, dass durch beliebige drei Punkte eine Gerade gezogen werde? Warum fordert man nicht, dass für ein dreidimensionales complexes Zahlensystem sämmtliche Addi-

*) Vergl. Kossak a. a. O. S. 17.

tions- und Multiplicationssätze gelten wie für ein reelles? Weil diese Forderung einen Widerspruch enthält. Ei so beweise man denn erst, dass jene andern Forderungen keinen Widerspruch enthalten! Ehe man das gethan hat, ist alle vielerstrebte Strenge nichts als eitel Schein und Dunst.

In einem geometrischen Lehrsatze kommt die zum Beweise etwa gezogene Hilfslinie nicht vor. Vielleicht sind mehre möglich z. B., wenn man einen Punkt willkührlich wählen kann. Aber wie entbehrlich auch jede einzelne sein mag, so hängt doch die Beweiskraft daran, dass man eine Linie von der verlangten Beschaffenheit ziehen könne. Die blosse Forderung genügt nicht. So ist es auch in unserm Falle für die Beweiskraft nicht gleichgiltig, ob „a + bi" einen Sinn hat oder blosse Druckerschwärze ist. Es reicht dazu nicht hin, zu verlangen, es solle einen Sinn haben, oder zu sagen, der Sinn sei die Summe von a und bi, wenn man nicht vorher erklärt hat, was „Summe" in diesem Falle bedeutet, und wenn man den Gebrauch des bestimmten Artikels nicht gerechtfertigt hat.

§ 103. Gegen die von uns versuchte Festsetzung des Sinnes von „i" lässt sich freilich Manches einwenden. Wir bringen dadurch etwas ganz Fremdartiges, die Zeit, in die Arithmetik. Die Secunde steht in gar keiner innern Beziehung zu den reellen Zahlen. Die Sätze, welche mittels der complexen Zahlen bewiesen werden, würden Urtheile a posteriori oder doch synthetische sein, wenn es keine andere Art des Beweises gäbe, oder wenn man für i keinen andern Sinn finden könnte. Zunächst muss jedenfalls der Versuch gemacht werden, alle Sätze der Arithmetik als analytische nachzuweisen.

Wenn Kossak*) in Bezug auf die complexe Zahl sagt: „Sie ist die zusammengesetzte Vorstellung von ver-

*) A. a. O. S. 17.

schiedenartigen Gruppen unter einander gleicher Elemente*)", so scheint er damit die Einmischung von Fremdartigem vermieden zu haben; aber er scheint es auch nur infolge der Unbestimmtheit des Ausdrucks. Man erhält gar keine Antwort darauf, was $1 + i$ eigentlich bedeute: die Vorstellung eines Apfels und einer Birne oder die von Zahnweh und Podagra? Beide zugleich kann es doch nicht bedeuten, weil dann $1 + i$ nicht immer gleich $1 + i$ wäre. Man wird sagen: das kommt auf die besondere Festsetzung an. Nun, dann haben wir auch in Kossak's Satze noch gar keine Definition der complexen Zahl, sondern nur eine allgemeine Anleitung dazu. Wir brauchen aber mehr; wir müssen bestimmt wissen, was „i" bedeutet, und wenn wir nun jener Anleitung folgend sagen wollten: die Vorstellung einer Birne, so würden wir wieder etwas Fremdartiges in die Arithmetik einführen.

Das, was man die geometrische Darstellung complexer Zahlen zu nennen pflegt, hat wenigstens den Vorzug vor den bisher betrachteten Versuchen, dass dabei 1 und i nicht ganz ohne Zusammenhang und ungleichartig erscheinen sondern dass die Strecke, welche man als Darstellung von i betrachtet, in einer gesetzmässigen Beziehung zu der Strecke steht, durch welche 1 dargestellt wird. Uebrigens ist es genau genommen nicht richtig, dass hierbei 1 eine gewisse Strecke, i eine zu ihr senkrechte von gleicher Länge bedeute, sondern „1" bedeutet überall dasselbe. Eine complexe Zahl giebt hier an, wie die Strecke, welche als ihre Darstellung gilt, aus einer gegebenen Strecke (Einheitsstrecke) durch Vervielfältigung, Theilung und Drehung**) hervorgeht. Aber auch hiernach erscheint jeder Lehrsatz, dessen Beweis sich auf die Existenz einer complexen Zahl stützen muss, von der geometrischen Anschauung abhängig und also synthetisch.

*) Man vergleiche über den Ausdruck „Vorstellung" § 27, über „Gruppe" das in Bezug auf „Aggregat" § 23 u. § 25 Gesagte, über die Gleichheit der Elemente §§ 34–39.

**) Der Einfachheit wegen sehe ich hier vom Incommensurabeln ab.

§ 104. Wodurch sollen uns denn nun die Brüche, die Irrationalzahlen und die complexen Zahlen gegeben werden? Wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen, so führen wir etwas Fremdartiges in die Arithmetik ein; wenn wir aber nur den Begriff einer solchen Zahl durch Merkmale bestimmen, wenn wir nur verlangen, dass die Zahl gewisse Eigenschaften habe, so bürgt nichts dafür, dass auch etwas unter den Begriff falle und unsern Anforderungen entspreche, und doch müssen sich grade hierauf Beweise stützen.

Nun, wie ist es denn bei der Anzahl? Dürfen wir wirklich von 1000 (1000^{1000}) nicht reden, bevor uns nicht soviele Gegenstände in der Anschauung gegeben sind? Ist es so lange ein leeres Zeichen? Nein! es hat einen ganz bestimmten Sinn, obwohl es psychologisch schon in Anbetracht der Kürze unseres Lebens unmöglich ist, uns soviele Gegenstände vor das Bewusstsein zu führen*); aber trotzdem ist 1000 (1000^{1000}) ein Gegenstand, dessen Eigenschaften wir erkennen können, obgleich er nicht anschaulich ist. Man überzeugt sich davon, indem man bei der Einführung des Zeichens a^n für die Potenz zeigt, dass immer eine und nur eine positive ganze Zahl dadurch ausgedrückt wird, wenn a und n positive ganze Zahlen sind. Wie dies geschehen kann, würde hier zu weit führen, im Einzelnen darzulegen. Die Weise, wie wir im § 74 die Null, in § 77 die Eins, in § 84 die unendliche Anzahl ∞_1 erklärt haben, und die Andeutung des Beweises, dass auf jede endliche Anzahl in der natürlichen Zahlenreihe eine Anzahl unmittelbar folgt (§§ 82 u. 83), werden den Weg im Allgemeinen erkennen lassen.

Es wird zuletzt auch bei der Definition der Brüche, complexen Zahlen u. s. w. Alles darauf ankommen, einen beurtheilbaren Inhalt aufzusuchen, der in eine Gleichung verwandelt werden kann, deren Seiten dann eben die neuen

*) Ein leichter Ueberschlag zeigt, dass dazu Millionen Jahre lange nicht hinreichen würden.

Zahlen sind. Mit andern Worten: wir müssen den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für solche Zahlen festsetzen. Dabei sind die Bedenken zu beachten, die wir (§§ 63—68) in Betreff einer solchen Umwandlung erörtert haben. Wenn wir ebenso wie dort verfahren, so werden uns die neuen Zahlen als Umfänge von Begriffen gegeben.

§ 105. Aus dieser Auffassung der Zahlen*) erklärt sich, wie mir scheint, leicht der Reiz, den die Beschäftigung mit der Arithmetik und Analysis ausübt. Man könnte wohl mit Abänderung eines bekannten Satzes sagen: der eigentliche Gegenstand der Vernunft ist die Vernunft. Wir beschäftigen uns in der Arithmetik mit Gegenständen, die uns nicht als etwas Fremdes von aussen durch Vermittelung der Sinne bekannt werden, sondern die unmittelbar der Vernunft gegeben sind, welche sie als ihr Eigenstes völlig durchschauen kann**).

Und doch, oder vielmehr grade daher sind diese Gegenstände nicht subjective Hirngespinnste. Es giebt nichts Objectiveres als die arithmetischen Gesetze.

§ 106. Werfen wir noch einen kurzen Rückblick auf den Gang unserer Untersuchung! Nachdem wir festgestellt hatten, dass die Zahl weder ein Haufe von Dingen noch eine Eigenschaft eines solchen, dass sie aber auch nicht subjectives Erzeugniss seelischer Vorgänge ist; sondern dass die Zahlangabe von einem Begriffe etwas Objectives aussage, versuchten wir zunächst die einzelnen Zahlen 0, 1 u. s. w. und das Fortschreiten in der Zahlenreihe zu definiren. Der erste Versuch misslang, weil wir nur jene Aussage von

*) Man könnte sie auch formal nennen. Doch ist sie ganz verschieden von der oben unter diesem Namen beurtheilten.

**) Ich will hiermit gar nicht leugnen, dass wir ohne sinnliche Eindrücke dumm wie ein Brett wären und weder von Zahlen noch von sonst etwas wüssten; aber dieser psychologische Satz geht uns hier gar nichts an. Wegen der beständigen Gefahr der Vermischung zweier grundverschiedener Fragen hebe ich dies nochmals hervor.

Begriffen, nicht aber die 0, die 1 abgesondert definirt hatten, welche nur Theile von ihr sind. Dies hatte zur Folge, dass wir die Gleichheit von Zahlen nicht beweisen konnten. Es zeigte sich, dass die Zahl, mit der sich die Arithmetik beschäftigt, nicht als ein unselbständiges Attribut, sondern substantivisch gefasst werden muss*). Die Zahl erschien so als wiedererkennbarer Gegenstand, wenn auch nicht als physikalischer oder auch nur räumlicher noch als einer, von dem wir uns durch die Einbildungskraft ein Bild entwerfen können. Wir stellten nun den Grundsatz auf, dass die Bedeutung eines Wortes nicht vereinzelt, sondern im Zusammenhange eines Satzes zu erklären sei, durch dessen Befolgung allein, wie ich glaube, die physikalische Auffassung der Zahl vermieden werden kann, ohne in die psychologische zu verfallen. Es giebt nun eine Art von Sätzen, die für jeden Gegenstand einen Sinn haben müssen, das sind die Wiedererkennungsätze, bei den Zahlen Gleichungen genannt. Auch die Zahlangabe, sahen wir, ist als eine Gleichung aufzufassen. Es kam also darauf an, den Sinn einer Zahlengleichung festzustellen, ihn auszudrücken, ohne von den Zahlwörtern oder dem Worte „Zahl" Gebrauch zu machen. Die Möglichkeit die unter einen Begriff F fallenden Gegenstände, den unter einen Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuzuordnen, erkannten wir als Inhalt eines Wiedererkennungsurtheils von Zahlen. Unsere Definition musste also jene Möglichkeit als gleichbedeutend mit einer Zahlengleichung hinstellen. Wir erinnerten an ähnliche Fälle: die Definition der Richtung aus dem Parallelismus, der Gestalt aus der Aehnlichkeit u. s. w.

§ 107. Es erhob sich nun die Frage: wann ist man berechtigt, einen Inhalt als den eines Wiedererkennungsurtheils aufzufassen? Es muss dazu die Bedingung erfüllt

*) Der Unterschied entspricht dem zwischen „blau" und „die Farbe des Himmels".

sein, dass in jedem Urtheile unbeschadet seiner Wahrheit die linke Seite der versuchsweise angenommenen Gleichung durch die rechte ersetzt werden könne. Nun ist uns, ohne dass weitere Definitionen hinzukommen, zunächst von der linken oder rechten Seite einer solchen Gleichung keine Aussage weiter bekannt als eben die der Gleichheit. Es brauchte also die Ersetzbarkeit nur in einer Gleichung nachgewiesen zu werden.

Aber es blieb noch ein Bedenken bestehen. Ein Wiedererkennungssatz muss nämlich immer einen Sinn haben. Wenn wir nun die Möglichkeit, die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuzuordnen, als eine Gleichung auffassen, indem wir dafür sagen: „die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt," und hiermit den Ausdruck „die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt" einführen, so haben wir für die Gleichung nur dann einen Sinn, wenn beide Seiten die eben genannte Form haben. Wir könnten nach einer solchen Definition nicht beurtheilen, ob eine Gleichung wahr oder falsch ist, wenn nur die eine Seite diese Form hat. Das veranlasste uns zu der Definition:

Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „Begriff gleichzahlig dem Begriffe F", indem wir einen Begriff F gleichzahlig einem Begriffe G nannten, wenn jene Möglichkeit der beiderseits eindeutigen Zuordnung besteht.

Hierbei setzten wir den Sinn des Ausdruckes „Umfang des Begriffes" als bekannt voraus. Diese Weise, die Schwierigkeit zu überwinden, wird wohl nicht überall Beifall finden, und Manche werden vorziehn, jenes Bedenken in andrer Weise zu beseitigen. Ich lege auch auf die Heranziehung des Umfangs eines Begriffes kein entscheidendes Gewicht.

§ 108. Es blieb nun noch übrig die beiderseits eindeutige Zuordnung zu erklären; wir führten sie auf rein

logische Verhältnisse zurück. Nachdem wir nun den Beweis des Satzes angedeutet hatten: die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der, welche dem Begriffe G zukommt, wenn der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig ist, definirten wir die 0, den Ausdruck „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m“ und die Zahl 1 und zeigten, dass 1 in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt. Wir führten einige Sätze an, die sich an dieser Stelle leicht beweisen lassen, und gingen dann etwas näher auf folgenden ein, der die Unendlichkeit der Zahlenreihe erkennen lässt:

Auf jede Zahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe eine Zahl.

Wir wurden hierdurch auf den Begriff „der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend“ geführt, von dem wir zeigen wollten, dass die ihm zukommende Anzahl auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folge. Wir definirten ihn zunächst mittels des Folgens eines Gegenstandes y auf einen Gegenstand x in einer allgemeinen φ-Reihe. Auch der Sinn dieses Ausdruckes wurde auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt. Und dadurch gelang es, die Schlussweise von n auf $(n + 1)$, welche gewöhnlich für eine eigenthümlich mathematische gehalten wird, als auf den allgemeinen logischen Schlussweisen beruhend nachzuweisen.

Wir brauchten nun zum Beweise der Unendlichkeit der Zahlenreihe den Satz, dass keine endliche Zahl in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber folgt. Wir kamen so zu den Begriffen der endlichen und der unendlichen Zahl. Wir zeigten, dass der letztere im Grunde nicht weniger logisch gerechtfertigt als der erstere ist. Zum Vergleiche wurden Cantors unendliche Anzahlen und dessen „Folgen in der Succession“ herangezogen, wobei auf die Verschiedenheit im Ausdrucke hingewiesen wurde.

§ 109. Aus allem Vorangehenden ergab sich nun mit grosser Wahrscheinlichkeit die analytische und apriorische Natur der arithmetischen Wahrheiten; und wir gelangten

zu einer Verbesserung der Ansicht Kants. Wir sahen ferner, was noch fehlt, um jene Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit zu erheben, und gaben den Weg an, der dahin führen muss.

Endlich benutzten wir unsere Ergebnisse zur Kritik einer formalen Theorie der negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen, durch welche deren Unzulänglichkeit offenbar wurde. Ihren Fehler erkannten wir darin, dass sie die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes als bewiesen annahm, wenn sich kein Widerspruch gezeigt hatte, und dass die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes schon als hinreichende Gewähr für seine Erfülltheit galt. Diese Theorie bildet sich ein, sie brauche nur Forderungen zu stellen; deren Erfüllung verstehe sich dann von selbst. Sie gebärdet sich wie ein Gott, der durch sein blosses Wort schaffen kann, wessen er bedarf. Es musste auch gerügt werden, wenn eine Anweisung zur Definition für diese selbst ausgegeben wurde, eine Anweisung, deren Befolgung Fremdartiges in die Arithmetik einführen würde, obwohl sie selbst im Ausdrucke sich davon frei zu halten vermag, aber nur weil sie blosse Anweisung bleibt.

So geräth jene formale Theorie in Gefahr, auf das Aposteriorische oder doch Synthetische zurückzufallen, wie sehr sie sich auch den Anschein giebt, in der Höhe der Abstractionen zu schweben.

Unsere frühere Betrachtung der positiven ganzen Zahlen zeigte uns nun die Möglichkeit, die Einmischung von äussern Dingen und geometrischen Anschauungen zu vermeiden, ohne doch in den Fehler jener formalen Theorie zu verfallen. Es kommt wie dort darauf an, den Inhalt eines Wiedererkennungsurtheils festzusetzen. Denken wir dies überall geschehen, so erscheinen die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen nicht geheimnissvoller als die positiven ganzen Zahlen, diese nicht reeller, wirklicher, greifbarer als jene.

TH. SCHATZKY, BUCHDR., BRESLAU, WALLSTR. 14b.

Verlag von Wilhelm Koebner in Breslau:

Theorie analytique de la chaleur.

Par

M. Fourier.

Nouvelle édition.

Preis 40 Mark.

Grundlehren der Logik.

Nach

Richard Shute's Discourse on truth

bearbeitet von

Dr. Karl Uphues.

Preis 7 Mark 20 Pf.

Th. Schatzky, Breslau.